# 50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 25.Jänner 2019

1. Es seien $x, y$ nicht negative reelle Zahlen. Man zeige: $(x + y^3)(x^3 + y) \geq 4x^2y^2$. Wann gilt Gleichheit?

2. Es seien $a, b, c, d$ positive reelle Zahlen. Beweise:
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq (a + b + c)d$$

3. Gegeben sind die nichtnegativen reellen Zahlen $a$ und $b$ mit $a + b = 1$. Man beweise:
$$\frac{1}{2} \leq \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} \leq 1$$
Wann gilt Gleichheit in der linken Ungleichung, wann in der rechten?

   (Walther Janous, LWA 2017)

4. Es sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck mit fnf gleich langen Seiten und rechten Winkeln in den Eckpunkten $C$ und $D$. Weiters sei $P$ der Schnittpunkt der Diagonalen $AC$ und $BD$. Man beweise, dass die Strecken $PA$ und $PD$ gleich lang sind.

   (Gottfried Perz, LWA 2016)

5. Der Kreis $k_2$ berührt den Kreis $k_1$ von innen im Punkt $X$. Der Punkt $P$ liegt auf keiner der beiden Kreislinien und nicht auf der Geraden durch die beiden Kreismittelpunkte. Der Punkt $N_1$ ist jener Punkt auf $k_1$, der $P$ am nächsten liegt, und $F_1$ ist jener Punkt auf $k_1$, der von $P$ am weitesten entfernt ist. Analog ist der Punkt $N_2$ jener Punkt auf $k_2$, der $P$ am nächsten liegt, und $F_2$ ist jener Punkt auf $k_2$, der von $P$ am weitesten entfernt ist. Man beweise, dass $\angle N_1XN_2 = \angle F_1XF_2$ gilt.

   (Robert Geretschlger - LWA 2015)

6. Es seien $a, b, c$ und $d$ reelle Zahlen mit $a < b < c < d$. Man ordne $x = a \cdot b + c \cdot d$, $y = b \cdot c + a \cdot d$ und $z = c \cdot a + b \cdot d$ der Größe nach und beweise die angegebene Reihenfolge.

   (Richard Henner LWA 2014)

7. Es sei $ABC$ ein gleichschenkeliges Dreieck mit $AC = BC$. Auf dem Bogen $CA$ seines Umkreises, der $B$ nicht enthlt, liege ein Punkt $P$. Der Fußpunkt der Normalen durch $C$ auf die Gerade $AP$ werde mit $E$ bezeichnet, der Fußpunkt der Normalen durch $C$ auf die Gerade $BP$ werde mit $F$ bezeichnet.

   Man beweise, dass die Strecken $AE$ und $BF$ gleich lang sind.