



## 50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs (A) „Mathematik macht Freu(n)de“

28. September 2018

1. Wie viele positive Teiler hat die Zahl 2019? Wie viele positive Teiler hat 2018? Wie viele positive Teiler hat 2017? Kann man aus diesen Teileranzahlen eine allgemeine Regel herleiten?
2. Man beweise: Wenn für zwei natürliche Zahlen ( $a$  und  $b$ )  $a^2 + b^2 = 2019$  gilt, dann ist 19 ein Teiler von  $a + b$ .
3. Unter dem Big Brother einer natürlichen Zahl  $n$  verstehen wir jene Zahl, die man erhält, wenn man die Ziffern von  $n$  der Größe nach geordnet (beginnend mit der größten) anschreibt. Big Brother von 2019 ist also 9210.  
Man beweise, dass die Differenz einer Zahl und ihres Big Brothers immer durch 9 teilbar ist.
4. Natürliche Zahlen mit genau vier positiven Teilern nennen wir 4T-Zahlen. 2018 und 2019 sind zwei aufeinander folgende 4T-Zahlen.  
Gibt es auch mehr als zwei aufeinander folgende 4T-Zahlen? Wie viele höchstens?
5. Man bestimme alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung  $20x^2 + 19y^2 = 2019$  und alle positiven ganzzahligen Lösungen der Gleichung  $20x^2 + 19y = 2019$ .
6. Man beweise, dass die Gleichung  $20x^2 + 19y^2 = 2018 \cdot 2019$  keine ganzzahligen Lösungen hat.
7. Für welche natürlichen Zahlen  $n > 1$  lässt sich 2019 als Summe von  $n$  aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen?
8. Wie viele natürliche Zahlen gibt es, die genau 2019 positive Teiler haben? Man bestimme die drei kleinsten Zahlen, die genau 2019 positive Teiler haben.
9. Man stelle 2019 als Summe von vier Primzahlen dar, von denen keine zwei gleich viele Ziffern haben.
10. Man bestimme alle natürlichen Zahlen  $n > 1$ , für die Folgendes gilt: Die Summe der Zahl  $n$  und ihres zweitgrößten Teilers ist 2019.

(Landeswettbewerb 2013, Richard Henner, abgeändert)