50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 29. März 2019

1. Das spitzwinkelige Dreieck ABC hat den Umkreismittelpunkt O. Der Höhenfußpunkt der Höhe durch A sei F. Ein Kreis mit dem Durchmesser AF schneidet die Seite AB in D und AC in E.

   Beweise: Die Gerade AO steht normal zur Geraden DE.

2. Der Inkreis des Dreiecks ABC berührt die Seite BC im Punkt D und die Seite AC in E. Die Winkelsymmetrale des Winkels $\angle ABC = \beta$ schneidet die Gerade DE im Punkt G.

   Bestimme den Winkel $\angle AGB$!

3. Das Produkt von drei positiven reellen Zahlen sei 1. Die Summe dieser drei Zahlen sei größer als die Summe ihrer Kehrwerte. Beweise, dass genau eine dieser Zahlen größer als 1 ist.

4. Gegeben ist ein Parallelogramm $ABCD$. Über den Strecken AB und AD werden gleichseitige Dreiecke ABF und ADE gezeichnet. Zeige, dass das Dreieck FCE gleichseitig ist.

5. In einem Dreieck ABC sei der Winkel $\alpha = 60°$. Ferner sei I der Inkreismittelpunkt und E und F die Schnittpunkte der Winkelsymmetralen w_β und w_γ mit den Seiten b und c.

   Zeige: IE = IF

6. Gegeben seien sieben reelle Zahlen aus dem Intervall $]1;13[$. Beweise, dass mindestens drei von ihnen die Seitenlängen eines Dreiecks sind.

7. Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und zueinander normalen Diagonalen. Beweise:
$$AD \cdot BC \geq AB \cdot CD$$

8. Es seien a, b und c positive reelle Zahlen. Man beweise:
$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq \frac{4a}{a+b}$$
   Wann gilt Gleichheit? (Walther Janous, LWA 2018)

9. Man zeige für reelle $a; b; c$ mit $a^2 + 2bc = 1$:
$$1 \leq (a^2 + 2b^2)(a^2 + 2c^2)$$

10. Für welche positiven ganzen Zahlen n gilt
$$2^n > 10n^2 - 60n + 80?$$