



## 50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs (A) „Mathematik macht Freu(n)de“

3. Mai 2019

1. Es seien  $a$ ,  $b$  und  $c$  ganze Zahlen, für die die Summe  $a^3 + b^3 + c^3$  durch 18 teilbar ist. Man beweise, dass das Produkt  $abc$  durch 6 teilbar ist.
2. Für die positiven reellen Zahlen  $x$  und  $y$  gilt die Bedingung  $xy = 4$ . Man beweise, dass die Ungleichung

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{y+3} \leq \frac{2}{5}$$

gilt. Für welche  $x$ ,  $y$  tritt Gleichheit ein?

3. Anton wählt eine beliebige ganze Zahl  $n \geq 0$ , die keine Quadratzahl ist, als Startzahl. Berta addiert dazu die nächstgrößere Zahl  $n + 1$ . Ist die Summe eine Quadratzahl, so hat sie gewonnen. Andernfalls addiert Anton zur Summe die nächstgrößere ganze Zahl  $n + 2$ . Ist die Summe eine Quadratzahl, so hat er gewonnen. Andernfalls ist wieder Berta am Zug und addiert die nächstgrößere ganze Zahl  $n + 3$ , u.s.w.

Man zeige, dass es unendlich viele Startzahlen gibt, mit denen Anton gewinnt.

(Aufg. 1, 2 und 3: Landeswettbewerb für Anfänger/innen, 2015)

4. Man bestimme alle natürlichen Zahlen  $n$  mit zwei verschiedenen positiven Teilern, die von  $\frac{n}{3}$  gleich weit entfernt sind.
5. Es sei  $ABCDE$  ein konvexes Fünfeck mit fünf gleich langen Seiten und rechten Winkeln in den Eckpunkten  $C$  und  $D$ . Weiters sei  $P$  der Schnittpunkt der Diagonalen  $AC$  und  $BD$ . Man beweise, dass die Strecken  $PA$  und  $PD$  gleich lang sind.

(Aufg. 4 und 5: Landeswettbewerb für Anfänger/innen, 2016)

6. Im gleichschenkeligen Dreieck  $ABC$  mit gleich langen Seiten  $AC$  und  $BC$  ist  $D$  der Fußpunkt der Höhe durch  $C$  und  $M$  der Mittelpunkt der Strecke  $CD$ . Die Gerade  $BM$  schneidet  $AC$  in  $E$ .

Man beweise, dass  $AC$  dreimal so lang wie  $CE$  ist.

7. Anton schreibt der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen auf, die durch 2 teilbar sind. Berta schreibt der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen auf, die durch 3 teilbar sind. Clara schreibt der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen auf, die durch 4 teilbar sind. Die ordnungsliebende Dora notiert die von den anderen aufgeschriebenen Zahlen. Dabei ordnet sie die Zahlen der Größe nach und schreibt keine Zahl mehrfach an.

Wie lautet die 2017. Zahl in ihrer Liste?

(Aufg. 6 und 7: Landeswettbewerb für Anfänger/innen, 2017)