



MATHEMATIK
macht
FREU(N)DE

51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen I-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“

20. September 2019

F-I_2019_09_20

<p>1.) Zeige: Für $x, y > 0$ mit $xy=4$ gilt: $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{y+3} \leq \frac{2}{5}$</p>	
<p>2.) Zeige, dass für ganze Zahlen a, b, c mit $18 a^3+b^3+c^3$ gilt: $6 abc$.</p>	
<p>3.) Der Ausdruck $n^4 - 20n^2 + 4$ stellt für keine ganze Zahl n eine Primzahl dar.</p>	
<p>4.) Gegeben seien fünf Gitterpunkte (das sind Punkte mit ganzzahligen Koordinaten) der Ebene. Zeige, dass es zwei davon gibt, auf deren Verbindungsstrecke wieder ein Gitterpunkt liegt.</p>	
<p>5.) Bestimme die kleinste ganze Zahl c, dass Folgendes gilt: Für alle x, y mit $x + y = c$ gilt: $x^2 + y^2 > \sqrt{2019}$.</p>	
<p>6.) Die n-te Fibonaccizahl F_n ist gegeben durch $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ mit $F_1 = 1; F_2 = 1$. Zeige, dass $F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots$</p>	<p>A:Engel: Problem-Solving Strategies</p>
<p>7.) Ein unvollständiges Drahtmodell eines Quaders besteht aus den Kanten AB, BF, FG, GC, CD, DH. Der verwendete Draht hat die Länge L. Wie sind die Kantenlängen zu wählen, damit das sich ergebende Volumen maximal ist?</p>	
<p>8.) Für welche reellen Zahlen x hat die Funktion $f(x) = x-1 + x-2 + x-3 + \dots + x-100$ den kleinsten Wert?</p>	<p>Andreescu: Mathematical Olympiad Treasures</p>
<p>9.) Löse das System in den reellen Zahlen $\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 \end{cases}$</p>	<p>D Math. Olympiade 2018</p>
<p>10.) Für die positiven reellen Zahlen a, b, c gilt $a + b + c = 1$. Welcher ist der größtmögliche Wert von $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1}$?</p>	

11.) Zeige, dass in der Folge (F_n) der Fibonaccizahlen ein Glied vorkommt, das

- (i) auf 0
- (ii) auf 2019 Nullen endet.

[$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}; F_1 = F_2 = 1$]