



51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“

27. September 2019

Was du vom Schulunterricht können sollst:

- Ganze Zahlen, natürliche Zahlen $\{0, 1, 2, \dots\}$
- Teilbarkeit, Rechenregeln für Teilbarkeiten
- Dezimaldarstellung einer Zahl (Basis 10), Ziffernsumme
- Teilbarkeitsregeln durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11 und durch kleine Zweier-, Fünfer- und Zehnerpotenzen
- Primzahlen, Primfaktorzerlegung und ihre Eindeutigkeit, Primfaktorzerlegung spezieller Zahlen, z.B. der Jahreszahl
- Größter gemeinsamer Teiler (ggT), kleinstes gemeinsames Vielfache (kgV), teilerfremde Zahlen, Berechnung über Primfaktorzerlegung

1. Man bestimme alle ganzen Zahlen x und y , für die $27x^2 + 9y^2 = 2019$ gilt.
2. Man bestimme alle ganzen Zahlen x und y , für die $27 + 9x^2 = y^2 + 2019$ gilt.
3. Man beweise, dass die Gleichung $x^2 + y^2 = 2019$ keine ganzzahligen Lösungen hat.
Man berechne alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = 2020$.
4. Welche Eigenschaften haben die Zahlen 2019 und 2020?
5. Man bestimme alle natürlichen Zahlen n , die genau 9 Teiler haben und keine Quadratzahlen sind.
6. Man bestimme die Anzahl aller natürlichen Zahlen n , die genau 20 Teiler haben und kleiner als 2020 sind.
7. Man berechne die letzten zwei Ziffern der Zahl $(19^{20})^{2020}$.
8. Man bestimme alle Paare (x, y) von ganzen Zahlen, für die gilt: $x^3 - y^3 = 19$.
9. Man bestimme alle Paare (x, y) von ganzen Zahlen, für die gilt:
a) $x^4 - y^4 = 607$, b) $x^4 - y^4 = 609$.
10. Man bestimme alle ganzzahligen Lösungspaare der Gleichung $x \cdot y + 8x - y = 2019$.