



## 51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“

27. September 2019

Was du vom Schulunterricht können sollst:

- Ganze Zahlen, natürliche Zahlen  $\{0, 1, 2, \dots\}$
- Teilbarkeit, Rechenregeln für Teilbarkeiten
- Dezimaldarstellung einer Zahl (Basis 10), Ziffernsumme
- Teilbarkeitsregeln durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11 und durch kleine Zweier-, Fünfer- und Zehnerpotenzen
- Primzahlen, Primfaktorzerlegung und ihre Eindeutigkeit, Primfaktorzerlegung spezieller Zahlen, z.B. der Jahreszahl
- Größter gemeinsamer Teiler (ggT), kleinstes gemeinsames Vielfache (kgV), teilerfremde Zahlen, Berechnung über Primfaktorzerlegung

1. Man bestimme alle ganzen Zahlen  $x$  und  $y$ , für die  $27x^2 + 9y^2 = 2019$  gilt.
2. Man bestimme alle ganzen Zahlen  $x$  und  $y$ , für die  $27 + 9x^2 = y^2 + 2019$  gilt.
3. Man beweise, dass die Gleichung  $x^2 + y^2 = 2019$  keine ganzzahligen Lösungen hat.  
Man berechne alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung  $x^2 + y^2 = 2020$ .
4. Welche Eigenschaften haben die Zahlen 2019 und 2020?
5. Man bestimme alle natürlichen Zahlen  $n$ , die genau 9 Teiler haben und keine Quadratzahlen sind.
6. Man bestimme die Anzahl aller natürlichen Zahlen  $n$ , die genau 20 Teiler haben und kleiner als 2020 sind.
7. Man berechne die letzten zwei Ziffern der Zahl  $(19^{20})^{2020}$ .
8. Man bestimme alle Paare  $(x, y)$  von ganzen Zahlen, für die gilt:  $x^3 - y^3 = 19$ .
9. Man bestimme alle Paare  $(x, y)$  von ganzen Zahlen, für die gilt:  
a)  $x^4 - y^4 = 607$ , b)  $x^4 - y^4 = 609$ .
10. Man bestimme alle ganzzahligen Lösungspaare der Gleichung  $x \cdot y + 8x - y = 2019$ .