51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenenkurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 18.Oktober 2019

F_2019_10_18.docx

1.)	Die Mittelungleichungen für zwei Variablen x, y > 0 $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ QM AM GM HM Quadratisches Arithmetisches Geometrisches Harmonisches Mittel	
2.)	Zeige, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b die Ungleichung $\frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a} \geq 4$ gilt.	
3.)	Zeige, dass in jedem Parallelogramm $\lvert a^2 - b^2 \rvert < e.f$ gilt. Dabei sind a, b die Seitenlängen und e, f die Diagonallängen.	
4.)	Man berechne für alle natürlichen Zahlen n $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{\left\lfloor \frac{3^k}{2} \right\rfloor}}{3^k}$	GW 1980
5.)	Sei a > 0. Dann gilt $a + \frac{4}{a^2} \geq 3$	Equ&Inequ. S 155
6.)	Löse das System in den reellen Zahlen $\begin{cases} \lfloor x \rfloor + \{y\} = z \\ \lfloor y \rfloor + \{z\} = x \\ \lfloor z \rfloor + \{x\} = y \end{cases}$ $\lfloor x \rfloor \ldots .\textit{größte ganze Zahl} \leq x$ und $\{y\} = y - \lfloor y \rfloor$	LW 2005
7.)	Löse in den reellen Zahlen $\left\lfloor \frac{2x+5}{3} \right\rfloor = \frac{7x-3}{5}$ $\lfloor x \rfloor$.... größte ganze Zahl kleiner oder gleich x	
8.)	Sind a, b, c Seitenlängen eines Dreiecks, so kann man aus den drei Größen $\sqrt{a}$; $\sqrt{b}$; $\sqrt{c}$ ein Dreieck konstruieren.	
9.)	$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots .. + \frac{1}{n}$ (harmonische Reihe) Lässt man in der harmonischen Reihe alle jene Summanden weg, deren Nenner – in üblicher Dezimaldarstellung – die Ziffer 9 enthält, so ist $H_n < 80$. $H'_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + .. + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + .. \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + .. \frac{1}{28} + \frac{1}{30} + \ldots + \frac{1}{80} + .. + \frac{1}{88} + \frac{1}{100} + \ldots < 80$	Problem-Solving Through Problems
10.)	Bestimme $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$	

Einige Aufgaben sind dem Buch von Tom *Ballik: Mathematik-Olympiade* entnommen.