



## 51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“

22. November 2019

Definition des Begriffs „Teilbarkeit“:

Eine ganze Zahl  $t$  heißt Teiler einer ganzen Zahl  $v$ , wenn es eine ganze Zahl  $n$  gibt, sodass  $t \cdot n = v$  gilt.

z.B.: 18 ist Teiler von 90, weil  $18 \cdot 5 = 90$  gilt.

0 ist Teiler nur von 0, weil  $0 \cdot x = 0$  für alle  $x$ .

1 ist Teiler jeder Zahl  $y$ , weil  $1 \cdot y = y$ .

Jede Zahl  $z$  ist Teiler von sich selbst, weil  $z \cdot 1 = z$ .

Definition des Begriffs „Kongruenz zweier Zahlen“:

$a \equiv b \pmod{m}$  ( $a$  ist kongruent zu  $b$  modulo  $m$ ), wenn  $a - b$  durch  $m$  teilbar ist.

z.B.:  $18 \equiv 3 \pmod{5}$ , weil  $18 - 3 = 15$  durch 5 teilbar ist.

$c \equiv 0 \pmod{m}$  bedeutet, dass  $c$  durch  $m$  teilbar ist.

Die Moduln 0 und 1 werden nicht verwendet.

Regeln für das Rechnen mit Kongruenzen:

$a \equiv a \pmod{m}$  gilt für alle Moduln  $m$ .

$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow b \equiv a \pmod{m}$ .

$a \equiv b \pmod{m}$  und  $b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$ .

$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a + c \equiv b + c \pmod{m}$  für alle  $c \in \mathbb{Z}$ .

$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \cdot n \equiv b \cdot n \pmod{m}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

$a \equiv b \pmod{m}$  und  $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m}$ .

$a \equiv b \pmod{m}$  und  $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$ .

$\text{ggT}(m, n) = 1$  und  $a \equiv b \pmod{m}$  und  $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a \equiv b \pmod{m \cdot n}$ .

$a \cdot b \equiv 0 \pmod{p}$  und  $p$  prim  $\Rightarrow a \equiv 0 \pmod{p}$  oder  $b \equiv 0 \pmod{p}$ .

$\text{ggT}(m, a) = 1$  und  $a \cdot b \equiv a \cdot c \pmod{m} \Rightarrow b \equiv c \pmod{m}$ .

Definition des Begriffs „Restklasse modulo  $m$ “

Sei  $r$  eine natürliche Zahl  $< m$ , so nennt man die Menge aller ganzen Zahlen, die zu  $r$  kongruent modulo  $m$  sind, die Restklasse  $r$  modulo  $m$ .

Es gibt genau  $m$  Restklassen modulo  $m$ .

Z.B. sind die geraden Zahlen die Restkl. 0 und die ungeraden Zahlen die Restkl. 1 mod. 2.

1. Man zeige, dass 2010 nicht als Differenz zweier Quadratzahlen dargestellt werden kann. [1, Landeswettbewerb für Anf. 2010]
2. Die beiden Zahlen  $a = 2019^6$  und  $b = 2 \cdot 17 \cdot 113 \cdot 157 \cdot 1061 \cdot 105838948573$  unterscheiden sich um genau 1. Welche der beiden Zahlen ist größer?
3. Man beweise:  $2017^n + 2018^{2n} + 2019^{3n}$  ist für keine natürliche Zahl  $n$  eine Quadratzahl.
4. Man berechne die Einer-, Zehner- und Hunderter-Ziffer der Zahl  $2015^{2016}$ .
5. Man bestimme alle (im dekadischen System) zweistelligen Zahlen, deren Quadrate die Ziffernsumme 27 haben.
6. Man bestimme alle ganzen Zahlen  $n$ , sodass  $n^4 + 2019$  durch 5 teilbar ist.
7. Man zeige, dass es keine ganzen Zahlen  $x$  und  $y$  gibt, für die  $4x^2 - 3y^2 = 2021$  gilt.
8. Man beweise, dass  $\frac{2018^{2020}-1}{2019}$  eine ganze Zahl ist.
9. Ist  $2020^{2015} + 1$  eine Primzahl?
10. Für welche natürlichen Zahlen  $n$  ist  $2^n + 1$  oder  $2^n - 1$  durch 15 teilbar?

## Literatur

- [1] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2009-2018: Aufgaben und Lösungen*. Nova MD, 2019.