51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenenkurs-I „Mathematik macht Freu(n)de“ 29.November 2019

F-I_2019_11_29.docx

1.) Zeige, dass für nichtnegative reelle Zahlen x, y, z mit $x + y + z = 1$
Die Ungleichung $xy + yz + zx < \frac{1}{2}$ gilt.
Lässt sich diese *Abschätzung* verschärfen?

2.) Löse in den nichtnegativen Zahlen $a^2 = b(b+7)$ W.Janous

3.) Zeige, dass für reelle Zahlen x, y die Ungleichung
$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ gilt.

4.) Für alle positiven Zahlen x, y, z gilt
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}$$

5.) Zeige: Die Gleichung $x^3 - 13x^2 - 13y - 2 = 0$ hat keine ganzzahlige Lösung.

6.) Zeige, dass die Gleichung $x^2 + y^2 + 8z = 3$ in den ganzen Zahlen nicht lösbar ist.

7.) Löse in den ganzen Zahlen $4x^2 + 3y = 7$

8.) Zeige: Für a, b, c > 0 gilt: $(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$

9.) Seien x, y reelle Zahlen. Zeige, dass $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$ gilt.

10.) Gegeben ist die Gleichung $3^x = 4y + 5$.
(a) Für welche ganzzahligen Lösungen (x; y) ist x eine Primzahl?
(b) Löse die Gleichung in den ganzen Zahlen.

Einige Aufgaben wurden dem Buch Equations and Inequalities von Herman/Kucera/Simsa –Verlag Springer entnommen.