51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenenkurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 6.Dezember 2019

F-I_2019_12_06.docx

1.)	Löse in den ganzen Zahlen das System $ab + 1 = c$ $a^2 + b^2 + 1 = 2c$ $2a + b = c$	56.D-Math.-Olympiade
2.)	Wenn a und b ungerade natürliche Zahlen sind, dann ist $a^2 + b^2$ keine Quadrat. Zeige dies.	
3.)	Zeige, dass die Gleichung $15x^2 - 7y^2 = 9$ keine Lösung in den ganzen Zahlen besitzt.	
4.)	Löse die Gleichung $x^3 + 125 = y^3$ in den ganzen Zahlen.	
5.)	Bestimme alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die folgendes Gleichungssystem erfüllen: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $x^3 + y^3 + z^3 = 1$	
6.)	Zeige: Wenn $x^3 + y^3 = z^3$ eine ganzzahlige Lösung besitzt, dann ist eine der drei Zahlen durch 7 teilbar.	
7.)	Seien a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks. Dann gilt $(a+b+c)^2 \leq 4(ab+bc+ca)$	
8.)	Seien p und q positive reelle Zahlen mit $p > q$. Dann gilt für alle reellen Zahlen x $$\frac{p+q}{p-q} \geq \frac{x^2 - 2qx + p^2}{x^2 + 2qx + p^2}$$	
9.)	Löse in den ganzen Zahlen $20xy - 4x - 5y = 26$	
10.)	Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt $$\sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \sqrt{(n-2) + \sqrt{\ldots\ldots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}} < \sqrt{n} + 1$$	