51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 20 .Dezember 2019

1. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit dem Umkreis k mit dem Mittelpunkt O. Die Gerade durch den Eckpunkt B normal zur Seite AC schneidet AC in E und k in D (verschieden von B). Der Lotfußpunkt des Lotes von D auf BC sei F.

   Beweise, dass EF normal auf BO steht.

2. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $AB > AC$ und dem Umkreismittelpunkt O. Es sei D ei Punkt auf der Seite BC und E der Fußpunkt des Lotes von D auf AB. Der Schnittpunkt der Geraden AO mit DE sei P.

   Beweise, dass die Punkte A, P, D und C auf einem Kreis liegen.

3. Es seien a, b und c positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq 2\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\Big).$$

   Wann gilt Gleichheit?

4. Es seien a und b nichtnegative reelle Zahlen mit $a + b < 2$. Man beweise die folgende Ungleichung:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab}.$$

   Für welche a, b gilt Gleichheit? [2, A 1]

5. Es seien a, b und c positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

6. Es sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck mit fünf gleich langen Seiten und rechten Winkeln in den Eckpunkten C und D. Weiters sei P der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD.

   Man beweise, dass die Strecken PA und PD gleich lang sind. [1, A 4]

7. Es seien a und b reelle Zahlen mit $ab = 1$. Man bestimme die größte Zahl C, sodass

$$(a-2)^2 + (b-2)^2 \geq C$$

   unabhängig von a und b erfüllt ist.

8. Es seien x, y reelle Zahlen mit $x + y \neq 0$. Beweise:

$$x^2 + y^2 + \frac{8}{(x+y)^2} \geq 4$$

.

Literatur

[1] Junior-Regionalwettbewerb 2016. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/204`. (aufgerufen am 23.12.2019).

[2] Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene 2018. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/409`. (aufgerufen am 23.12.2019).