51. Österreichische Mathematik-Olympiade

**Fortgeschrittenenkurs** „Mathematik macht Freu(n)de“ 10.Jänner 2020

F-I_2020_01_10.docx

1.) Die drei ganzen Zahlen x, y, z sind paarweise relativ prim. Löse in den ganzen Zahlen $x^2 + y^2 = z^2$

2.) Welche reellen Zahlen p sind zulässig, damit die Ungleichung $x^2 + pxy + y^2 \geq 0$ für alle reellen Zahlen x, y gilt?

3.) Löse in den ganzen Zahlen die Gleichung $y^3 - x^3 = 26$

4.) Für welche ganzen Zahlen x, y gilt $x^2 + 3x = y^2$ ?

5.) Zeige: Für positive reelle Zahlen x, y, z gilt: $(x+y+z)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$

6.) Für welche natürlichen Zahlen n gilt $2^n > 10n^2 - 60n + 80$? GW 2000

7.) Löse in den nichtnegativen ganzen Zahlen $2^x + 3^y = z^2$ Andreescu: Number Theory

8.) Die Folge $a_n$ ist gegeben durch $a_1 = 3$ und $a_{n+1} = 2a_n - 1$. Zeige, dass unendlich viele Glieder der Folge durch 3 teilbar sind.

9.) Zeige, dass $n^5 + n^4 + 1$ keine Primzahl ist, wenn $n>1$. Probl.-Solving

10.) Es gibt kein Polynom p(x) mit ganzzahligen Koeffizienten, sodass $f(7) = 11$ und $f(11) = 13$. E8

11.) Löse in den nichtnegativen ganzen Zahlen $x + y + z = xyz$

12.) Es gibt keine positiven ganzen Zahlen a, b mit $4a(a+1) = b(b+3)$ LW 2005

13.) Zeige, dass (0|0|0) das einzige Lösungstripel nichtnegativer ganzer Zahlen der Gleichung $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ ist. Andreescu: Number Theory

14.) Gegeben ist die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $(a_n) = \langle 1; 1; \ldots \rangle$ *wobei* $a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1} + 1$.

a) Zeige, dass $a_{2020}$ nicht durch 4 teilbar ist.

b) Zeige, dass $\frac{a_{2019}+a_{2020}+a_{2021}}{4}$ eine ganze Zahl ist.

15.) Das Bildungsgesetz der Fibonacci-Folge $\langle f_n \rangle$ lautet $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ mit $f_1 = f_2 = 1$.
Zeige, dass $f_{2022}$ durch 4 teilbar ist.