51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen-I-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 17. Jänner 2020

1. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit dem Umkreis k mit dem Mittelpunkt O. Die Gerade durch den Eckpunkt B normal zur Seite AC schneidet AC in E und k in D (verschieden von B). Der Lotfußpunkt des Lotes von D auf BC sei F. Beweise, das EF normal auf BO steht.

2. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $AB > AC$ und dem Umkreismittelpunkt O. Es sei D ein Punkt auf der Seite BC und E der Fußpunkt des Lotes von D auf AB. Der Schnittpunkt der Geraden AO mit DE sei P.

   Beweise, dass die Punkte A, P, D und C auf einem Kreis liegen.

3. Es sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck mit fünf gleich langen Seiten und rechten Winkeln in den Eckpunkten C und D. Weiters sei P der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD. Man beweise, dass die Strecken PA und PD gleich lang sind.[1, Gottfried Perz]

4. Gegeben ist ein Parallelogramm $ABCD$. Über den Strecken AB und AD werden gleichseitige Dreiecke ABF und ADE gezeichnet. Zeige, dass das Dreieck FCE gleichseitig ist.

5. Es seien x, y und z positive reelle Zahlen mit $x+y+z = 3$. Man beweise, dass mindestens eine der drei Zahlen

   $$x(x+y-z); \quad y(y+z-x) \quad \text{oder} \quad z(z+x-y)$$

   kleiner oder gleich 1 ist. [2, Karl Czakler]

6. Beweise, dass für keine natürliche Zahl n ein Ausdruck der Form $n^2 + 11n + 30$ eine Quadratzahl sein kann.

7. Man zeige für alle von Null verschiedenen reellen a, b folgende Ungleichung:

   $$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq ab + 2$$

8. Man zeige für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ folgende Ungleichung:

   $$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \geq \frac{3n}{2n+1}$$

9. Man zeige für alle reellen a:

   $$1 + 2a^4 \geq a^2 + 2a^3$$

Literatur

[1] Junior-Regionalwettbewerb 2016. https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/204. (aufgerufen am 13.1.2020).

[2] Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene 2015. https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/92. (aufgerufen am 13.1.2020).