51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenenkurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 31.Jänner 2020

F-I_2020_01_31.docx

1.) Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ natürlicher Zahlen ist durch $a_1 = 1$; $a_2 = 1$ und $a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1} + 1$ gegeben.
   (a) Zeige, dass a_{2020} nicht durch 4 teilbar ist.
   (b) Ist a_{2020} eine Quadratzahl?
   (c) Zeige, dass $\frac{a_{2019}+a_{2020}+a_{2021}}{4}$ eine ganze Zahl ist.

2.) Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ natürlicher Zahlen ist durch $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = 3a_n - 2$ gegeben.
   - Gib ein explizites Bildungsgesetz für a_n an.
   - Zeige, dass a_{2020} nicht durch 5 teilbar ist.

3.) Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ von Zahlen ist gegeben durch
$a_0 = 1$; $a_1 = 1$; $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + 2}{a_n}$
Zeige, dass alle Glieder der Folge ganze Zahlen sind.

Engel: Problem – Solving S223

4.) In einem Quadrat ABCD seien E bzw. F Punkte auf BC bzw. CD so, dass der Winkel <EAF = 45° ist. M und N seien die Schnittpunkte von BD mit AE bzw. AF. P sei der Schnittpunkt von MF und NE. Zeige, dass AP normal auf EF steht.

5.) In einem Sehnenviereck ABCD seien P, Q, R; S die Inkreismittelpunkte der Dreiecke ABC; BCD; CDA; DAB.
Zeige: PQRS ist ein Rechteck.

6.) In einem Dreieck ABC seien D, E, F die Fußpunkte der Höhen auf BC, CA, AB. Zeige: Die Höhen im Dreieck ABC sind die Winkelhalbierenden im Dreieck DEF.

7.) Bestimme alle Paare (a; b) ganzer Zahlen, sodass $5a^2 + 4b^2 - 8ab - 6a + 4 = 0$

8.) Zeige, dass für alle Paare (x; y) reeller Zahlen gilt: $(1+x+y)^2 \geq 3(x+y+xy)$

9.) Das Bildungsgesetz einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist gegeben durch $a_1 = a_2 = 1$; $a_3 = 3$ und $a_{n+1} = \frac{17 + a_n \cdot a_{n-1}}{a_{n-2}}$. Zeige, dass alle Folgenglieder ganzzahlig sind.

Einige Aufgaben wurden dem Buch von Andreescu; Enescu:Mathematical Olympiad Treasures;

Verlag Birkhäuser entnommen.