51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen I - Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 14. Februar 2020

1. Es sei I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Er wird an den Dreiecksseiten gespiegelt. Dabei entsteht ein Dreieck PQR. Man zeige: Das Dreieck PQR ist spitzwinkelig. Welcher besondere Punkt des Dreiecks PQR ist der Punkt I?

2. In einem Dreieck ABC sei der Winkel $\alpha = 60°$. Ferner seien I der Inkreismittelpunkt und E und F die Schnittpunkte der Winkelsymmetralen w_β und w_γ mit den Seiten AC und AB.

   Zeige: $IE = IF$.

3. Das Dreieck ABC sei spitzwinklig und nicht gleichschenklig. Der Umkreis dieses Dreiecks werde mit k bezeichnet. Der Höhenschnittpunkt soll H heißen. Der von C verschiedene Schnittpunkt der Geraden durch C mit dem Umkreismittelpunkt U von k mit dem Kreis k soll G heißen. Zeige: Das Viereck $ABGH$ ist ein Parallelogramm.

4. Es seien k ein Kreis mit Radius r und AB eine Sehne von k mit $AB > r$. Weiters sei S jener Punkt auf der Sehne AB, für den $AS = r$ gilt. Die Streckensymmetrale von BS schneide den Kreis k in den Punkten C und D. Die Gerade durch die Punkte D und S schneide k in einem weiteren Punkt E.

   Man beweise, dass das Dreieck CSE gleichseitig ist. [1, A 2 (Stefan Leopoldseder)]

5. In einem Rechteck $ABCD$ gilt $BC = 2AB$. Sei S der Halbierungspunkt von AD und P ein beliebiger Punkt auf AB. Der Punkt Q auf BC habe die Eigenschaft, dass $\angle SPQ = 45°$.
   Man zeige: $SPBQ$ ist ein Sehnenviereck. [2, A 8]

6. Auf dem Halbkreis über einer Strecke AB bewegen sich zwei Punkte C und D, deren Abstand konstant ist. E sei der Schnittpunkt von AC und BD, F sei der Schnittpunkt von AD und BC.
   Beweise, dass der Flächeninhalt des Vierecks $AEBF$ konstant ist. [2, A 16]

7. Es sei ABC ein gleichschenkeliges Dreieck mit $\overline{AC} = \overline{BC}$. Der Inkreis mit dem Mittelpunkt I berührt die Seite BC in D und die Seite AC in E. Der Schnittpunkt von AD mit BE sei S. Der Schnittpunkt von AD mit dem Inkreis sei $P(\neq D)$.

   Beweise, dass die Punkte P, I, S und E auf einem Kreis liegen.

Literatur

[1] Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene 2018. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/409`. (aufgerufen am 10.2.2020).

[2] Birgit Vera Schmidt. Fortgeschrittenen-Kurs TU Graz 2009/2010. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/26`. (aufgerufen am 10.2.2020).