51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 21. Februar 2020

1. Die beiden Kreise $k_1[M_1; r_1]$ und $k_2[M_2; r_2]$ berühren einander von außen. A liegt auf k_1 und der Winkel $\angle M_2M_1A$ beträgt 60^o. Die Tangente durch A berührt auch k_2.

   Wie lang ist der Radius r_2?

2. Gesucht sind n ($\leq$ 19) paarweise verschiedene Zahlen a_1, a_2, ..., a_n aus der Menge $\{1, 2, ...19\}$, für die gilt: $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 20 \cdot 19$.

   Man gebe ein Beispiel für solche Zahlen an.

   Kann es sein, dass alle diese Zahlen ungerade sind?

3. Gegeben ist ein regelmäßiges n-Eck mit dem Umkreismittelpunkt M_1. A und B seien zwei benachbarte Punkte dieses n-Ecks. M_2 ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABM_1, M_3 der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABM_2, u.s.w.

   Man beweise, dass die Folge $(M_1, M_2, M_3, \dots)$ aus höchstens $n-1$ verschiedenen Punkten besteht.

4. Man bestimme alle geometrischen Zahlenfolgen $(a, aq, aq^2, aq^3, \dots)$ mit ganzzahligem $a > 0$ und ganzzahligem $q > 1$, in denen genau drei zweistellige und genau zwei dreistellige Zahlen vorkommen, wenn man diese Zahlen im dekadischen System schreibt.

5. Für alle natürlichen Zahlen $x > 2$ sei f(x) die Summe aller Zahlen zwischen x und 2x, die zu x relativ prim sind.

   Man beweise: $\frac{f(x)}{3x}$ ist eine ganze Zahl, für die gilt: $1 \leq \frac{f(x)}{3x} \leq \frac{x-1}{2}$. Für welche x gilt ein Gleichheitszeichen?

6. Man bestimme alle ganzen Zahlen x, y und z, die Lösungen des Gleichungssystems

$$
\begin{gathered}
3y^2 - x^2 = 11 \\
x^3 + 5x = 9y^2z
\end{gathered}
$$

   sind.

7. Gegeben ist ein Kreis $k[M; r]$ und zwei Punkte A und B auf k. $k_1[M_1; r_1]$ und $k_2[M_2; r_2]$ seien jene Kreise, die k und auch die Sehne AB berühren. $k_3[M_3; r_3]$ sei jener Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Strecke M_1M_2 liegt und der durch M_1 und M_2 geht.

   Wie lang ist die Strecke CD, die k_3 aus der Sehne AB herausschneidet?

8. Man bestimme alle reellen Lösungen des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} a \cdot b + c + d &= 2 \\ a + b \cdot c + d &= 0 \\ a + b + c \cdot d &= 0 \\ 3a + b + 3c + d &= 3 \end{aligned}$$

9. u und v sind die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$.

   Man zeige, dass es nicht möglich ist, dass die Zahlen p, q, u und v (in beliebiger Reihenfolge) aufeinanderfolgende ganze Zahlen sind!

10. Für ein gleichschenkeliges Dreieck ABC mit der Basis AB und dem Inkreismittelpunkt I gilt: Der Umfang des Vierecks AIBC ist doppelt so groß wie der des Dreiecks AIB.

    Man berechne die Winkel des Dreiecks!