51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenenkurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 28.Februar 2020≥0

F-I_2020_02_28

1.) Wenn die natürliche Zahl n die Summe von zwei Quadraten ist, so gilt dies auch für die Zahl 2n. Zeige dies.

2.) Zeige, dass die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ nur die triviale Lösung (0|0|0) in den ganzen Zahlen besitzt.

3.) Wenn eine arithmetische Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Quadratzahl enthält, so enthält sie sogar unendlich viele Quadratzahlen.
Eine arithmetische Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist eine Folge der Form $a_n = a_0 + n\cdot d$

4.) Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist durch $a_1=1$; $a_2=2$ und das Bildungsgesetz $a_{n+1} = \frac{a_n^2+3}{a_{n-1}}$ gegeben. Zeige, dass alle Glieder ganzzahlig sind.

5.) Man beweise für alle reellen Zahlen a die Ungleichung $a + a^3 - a^4 - a^6 < 1$. GW 2012 G.Baron

6.) Löse in den ganzen Zahlen: $1 + x^2y = x^2 + 2xy + 2x + y$ Großbritannien 2002

7.) Gegeben ist die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ mit $x_0 = 0$; $x_1 = 1$ und $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$.
Zeige, dass $y_n = (x_n)^2 + 2^{n+2}$ ist für alle natürlichen Zahlen n>1 das Quadrat einer ungeraden Zahl.

8.) Sei n eine ganze Zahl und p eine Primzahl. Löse die Gleichung $n^2 - 7n + 8 = p$

9.) Seien x und y reelle Zahlen mit $0 \leq x^2 < 1$ und $0 \leq y^2 < 1$.
Zeige, dass $\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2 < 1$ gilt.

10.) In einem rechtwinkeligen Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen a, b, c ist der Inkreisradius ρ ganzzahlig. Zeige dies.