



51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenenkurs „Mathematik macht Freu(n)de“

6. März 2020

Kurswettbewerb für Fortgeschrittene

1. Es seien a, b, c und d positive reelle Zahlen mit $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 4$.

Man beweise: $a + bcd \leq 2$

2. Am 6.3.2020 schreibt Georg alle positiven ganzen Zahlen an, die kleiner als 2020 sind und durch 3 aber nicht durch 6 teilbar sind.

a) Wie viele Zahlen hat er angeschrieben, die das Produkt von zwei verschiedenen Primzahlen sind?

b) Wie viele Quadratzahlen hat er angeschrieben?

3. Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit $AD < AB$. Es sei M der Mittelpunkt der

Strecke AD und N der Mittelpunkt der Strecke BC . Der Punkt E sei der Fußpunkt des Lotes von B auf die Gerade CM .

- Zeige, dass $ANEM$ ein gleichschenkeliges Trapez ist.
- Zeige, dass die Fläche des Vierecks $ABNE$ halb so groß ist wie die Fläche des Rechtecks $ABCD$.

4. Löse in den ganzen Zahlen $3^x + 6y = 2^z$.