51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen II - Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 11. Oktober 2019

Kombinatorik

Extremalprinzip und Schubfachschluss

1. In einer Schulklasse gelte folgende Eigenschaft: Je zwei Personen mit der gleichen Anzahl von Freunden in der Klasse haben keinen gemeinsamen Freund in der Klasse (Freundschaften sind immer gegenseitig, und es gibt in der Klasse mindestens eine Freundschaft.). Man zeige: Es gibt eine Person mit genau einem Freund. [1, Aufgabe 2]

2. Gegeben seien 5 verschiedene Gitterpunkte der Koordinatenebene (ein Punkt heißt dabei Gitterpunkt, wenn er ganzzahlige Koordinaten hat). Beweise, dass mindestens eine der Verbindungsstrecken einen Gitterpunkt im Inneren enthält. [2, Aufgabe 48 1]

3. Die Ritter der Tafelrunde sitzen um einen runden Tisch. Jeder hat einige ausgetrunkene Gläser Bier vor sich stehen, wobei jeder genau so viel getrunken hat wie der Durchschnitt seiner beiden Sitznachbarn. Man zeige: Alle Ritter haben gleich viel getrunken. [1, Aufgabe 3]

4. Jeder Gitterpunkt der Ebene wird mit einer positiven ganzen Zahl beschriftet, und zwar so, dass jede dieser Zahlen das arithmetische Mittel der vier Nachbarzahlen ist. Man zeige, dass alle Zahlen gleich sind. (Gitterpunkte sind alle Punkte mit ganzzahligen Koordinaten.) [1, Aufgabe 4]

5. Auf einem 10×10-Schachbrett werden 41 Turme beliebig verteilt. Zeige, dass es unter ihnen stets fünf gibt, die einander paarweise nicht bedrohen. [2, Aufgabe 53]

6. In der einklassigen Raacher Volksschule hat jedes Kind höchstens drei Feinde. Man beweise, dass man die Kinder der Schule so in zwei Klassen einteilen kann, dass jedes Kind in seiner Klasse höchstens einen Feind hat. [1, Aufgabe 10]

7. In der Ebene seien n verschiedene Punkte $H_1, \ldots, H_n$ (Häuser), sowie n andere Punkte $B_1, \ldots, B_n$ (Brunnen) gegeben. Keine drei von diesen $2n$ Punkten sind kollinear. Man zeige, dass man jedes Haus mit jeweils einem Brunnen so durch eine gerade Strecke verbinden kann, dass sich diese Strecken nicht schneiden. [1, Aufgabe 9]

8. Eine Klasse hat eine ungerade Anzahl von Kindern, und diese machen eine Schneeballschlacht. Jedes Kind stellt sich irgendwo am (konvexen, baumfreien) Schulhof auf, wobei keine zwei Abstände zwischen Kindern genau gleich sind. Dann formt jedes Kind genau einen Schneeball und schießt damit auf das Kind, das ihm am nächsten ist (und trifft). Man zeige: Es gibt ein Kind, das von keinem Schneeball getroffen wird. [1, Aufgabe 11]

9. Man zeige: Bei der Schneeballschlacht aus der vorigen Aufgabe wird kein Kind von mehr als 5 Schneebällen getroffen. [1, Aufgabe 12]

10. Man zeige: Jedes konvexe Polyeder (mit endlich vielen Seiten) hat zwei Seitenflächen mit derselben Anzahl von Kanten. [1, Aufgabe 1]

11. Zeige, dass von sechs Personen, die sich begegnen, es entweder drei gibt, die einander gegenseitig bereits kennen, oder drei, die einander gegenseitig noch nicht kennen. [2, Aufgabe 44 1]

12. Jede von 17 Wissenschaftlerinnen steht mit allen anderen im Briefwechsel; dabei werden insgesamt drei verschiedene Themen behandelt. Je zwei Wissenschaftlerinnen korrespondieren nur über genau eines der Themen. Man zeige, dass es unter ihnen drei gibt, die untereinander ein und dasselbe Thema behandeln. [2, Aufgabe 44 2]

Literatur

[1] Birgit Vera Schmidt. Extremalprinzip. `https://www.math.aau.at/OeMO/Downloads/datei/550`. (aufgerufen am 23.12.2019).

[2] Stefan Wagner. Skriptum Kombinatorik. `https://www.math.aau.at/OeMO/Downloads/datei/398`. (aufgerufen am 23.12.2019).