51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen II - Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 22. November 2019

Algebra

1. Beweise, dass es keine reellen Zahlen x und y gibt, für die

$$(x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 2(x + y) = 2$$

gilt. [1, 2019]

2. Finde eine reelle Zahl p mit ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 17$, wobei x_1 und x_2 die Lösungen der Gleichung

$$(p - 3)x^2 + (p^2 + 1)x - 11p + 18 = 0$$

sind. [1, 2019]

3. Beweise, dass für nicht negative reelle Zahlen a und b mit $a + b \leq 2$ gilt:

$$\frac{1}{(1 + a^2)} + \frac{1}{(1 + b^2)} \leq \frac{2}{(1 + ab)}$$

[1, 2019]

4. Löse die Gleichung:

$$cos(2x) + cos(2y) + 2sin(x)sin(y) + 2cos(x)cos(y) = 4$$

[1, 2019]

5. Finde alle Tripel (x, y, z), die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{aligned}(x^2 + 1)y = z^2 + 1\\(y^2 + 1)z = x^2 + 1\\(z^2 + 1)x = y^2 + 1\end{aligned}$$

[1, 2018]

6. Für drei unterschiedliche, reelle Zahlen a, b und c gilt $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \neq 0$. Beweise, dass mindestens eine der drei Zahlen

$$\frac{a+b}{a+b-c}, \quad \frac{a+c}{a+c-b}, \quad \frac{c+b}{c+b-a}$$

im Intervall $(1, 2)$ liegt und dass mindestens eine von ihnen nicht im Intervall $(1, 2)$ liegt. [1, 2018]

7. Drei positive, reelle Zahlen a, b und c erfüllen die Gleichungen

$$a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{3}ab \quad \text{und} \quad a^2 - b^2 + c^2 = \sqrt{2}ac.$$

Bestimme den Wert von $\frac{b}{c}$. [1, 2018]

8. Sei n eine natürliche Zahl. Beweise die Ungleichung:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdot + \frac{1}{3n} > 1$$

[1, 2018]

9. Berechne

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}}.$$

[1, 2018]

Literatur

[1] Kroatischer Regionalwettbewerb Natjecanja iz matematike u RH. `http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm`. (aufgerufen am 23.12.2019).