51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen II - Kurs „Mathematik macht Freu(n)de" 13. Dezember 2019

Zahlentheorie

1. Seien a, b, m positive ganze Zahlen. Man nennt b das (multiplikative) Inverse von a modulo m, wenn
$$a \cdot b \equiv 1 \pmod{m}$$
gilt.

   Zeige, dass es genau dann ein Inverses zu a gibt, wenn a zu m teilerfremd ist.

2. Man bestimme die Anzahl der natürlichen Zahlen $N < 1000000 = 10^6$ mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt einen ganzzahligen Exponenten k mit $1 \leq k \leq 43$, sodass 2012 ein Teiler von $N^k - 1$ ist. [2, BF 2012, A 5]

3. Sei p eine Primzahl und b, n positive ganze Zahlen wobei $\mathrm{ggT}(n, p-1) = 1$ gilt. Zeige, dass es ein a gibt, sodass
$$a^n \equiv b \pmod{p}$$
gilt.

4. Es sei p eine Primzahl und n eine positive ganze Zahl. Wie viele Werte kann

   $a^n \pmod{p}$ annehmen?

5. Zeige, dass es keine ganzzahligen Lösungen zu $y^2 = x^5 - 4$ gibt. [1, A 4]

6. Zeige, dass für alle positiven ganzen Zahlen a, b, n mit $n > 1$
$$\mathrm{ggT}(n^a - 1, n^b - 1) = n^{\mathrm{ggT}(a,b)} - 1$$
gilt. [3, S.147, Problem 38]

7. Sei $a \geq 2$ eine positive ganze Zahl und p eine Primzahl. Wir betrachten Ketten aus p Perlen, wobei jede Perle in einer von a möglichen Farben gefärbt ist. Zwei Ketten gelten als unterschiedlich, wenn sie nicht durch Drehung ineinander übergehen.

   Wie viele solcher Ketten gibt es?

Literatur

[1] Balkan Mathematical Olympiad 1998.

[2] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2009-2018: Aufgaben und Lösungen*. Nova MD, 2019.

[3] Ronald L. Graham et al. *Concrete Mathematics*. Addison Wesley, 1994.