51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen II - Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 10. und 17. Jänner 2020

Geometrische Transformationen 1: Bewegungen

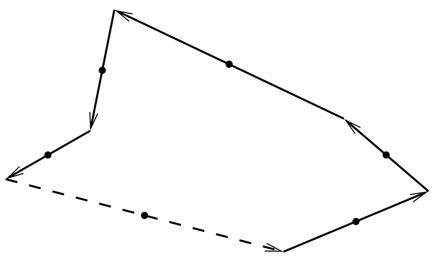
Ivan Izmestiev

Viele Ideen dieses Übungsblattes stammen aus der Mathematischen Sommerschule in Kirov [1] und aus dem Buch [2].

1 Einleitung (etwas Theorie)

Eine Aufgabe „zum Aufwärmen“. Wenn sie nicht gleich gelingt, dann kehren wir zu ihr nach einiger Zeit wieder.

Aufgabe 1. *In der Ebene sind sechs Punkte $A_1, \dots, A_6$ markiert. Ein Frosch springt über den Punkt A_1 (so, dass A_1 der Mittelpunkt der Strecke zwischen Absprung und Landung ist), dann über den Punkt A_2, usw. bis A_6.*



Zu seinem Erstaunen findet sich der Frosch im selben Punkt, wo er begonnen hat. Deswegen versucht er, die Sprünge von einem anderen Punkt aus zu wiederholen.
Zeige, dass der Frosch immer zum Ausgangspunkt zurückkehrt, unabhängig vom Startpunkt. Was zeichnet diese spezielle Lage der Punkte $A_1, \dots, A_6$ aus?

Definition 2. *Eine* Bewegung *der Ebene ist eine Abbildung, die die Abstände zwischen den Punkten erhält.*

Beispiele von Abbildungen: Verschiebung, Drehung, Geradenspiegelung.

Aufgabe 3. *Warum wurde die Punktspiegelung oben nicht erwähnt? Gibt es noch andere Arten von Bewegungen?*

Direkt aus der Definition folgt, dass die Komposition zweier Bewegungen wieder eine Bewegung ist.
Komposition zweier Verschiebungen ist wieder eine Verschiebung:

$$T_w \circ T_v = T_{v+w},$$

wenn man mit T_v die Verschiebung um den Vektor v bezeichnet. Komposition zweier Drehungen ist eine Drehung, wenn die Drehzentren zusammenfallen:

$$R_p^\psi \circ R_p^\varphi = R_p^{\varphi+\psi},$$

wenn R_p^φ die Drehung mit Zentrum p um den Winkel φ bezeichnet. Was passiert aber mit der Ebene, wenn man sie zuerst um einen Punkt dreht, dann um einen anderen:

$$R_q^\psi \circ R_p^\varphi = ?$$

Die Antwort ist nicht überraschend: die Komposition ist eine Drehung um die Summe zweier Winkel. (Allerdings muss man aufpassen, wenn diese Summe 2π ergibt...)

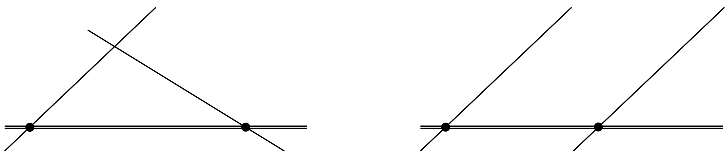
$$R_q^\psi \circ R_p^\varphi = \begin{cases} R_r^{\varphi+\psi}, & \text{wenn } \varphi + \psi \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod} 2\pi) \\ T_v, & \text{wenn } \varphi + \psi \equiv 0 \ (\mathrm{mod} 2\pi) \end{cases} \tag{$*$}$$

Wir werden nun die Behauptung $(*)$ beweisen.

Aufgabe 4. *Was ist die Komposition zweier Geradenspiegelungen? Es gibt zwei Fälle: die Geraden schneiden einander oder sind parallel.*

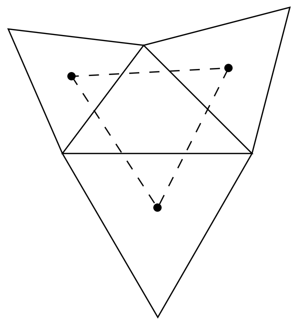
Aufgabe 5. *Auf wie viele verschiedenen Weisen kann eine Drehung/Verschiebung als Komposition zweier Geradenspiegelungen dargestellt werden?*

Aufgabe 6. *Sich auf die Skizze stützend, beweise die Behauptung $(*)$. Erkläre, wie man das Drehzentrum r aus den Drehzentren p und q ermittelt.*



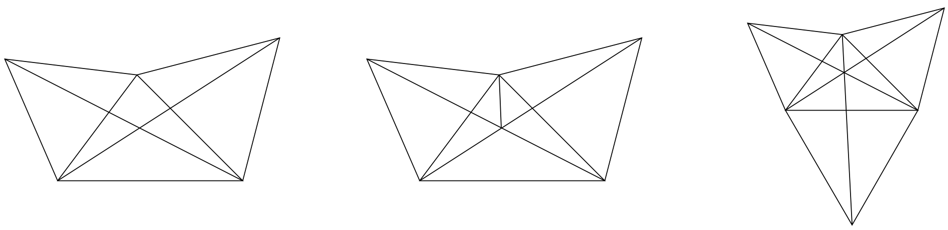
2 Einige Aufgaben

Aufgabe 7 (Satz von Napoleon)**.** *Auf den Seiten eines Dreiecks errichtet man nach außen gleichseitige Dreiecke. Zeige, dass die Schwerpunkte dieser Dreiecke selbst ein gleichseitiges Dreieck bilden.*



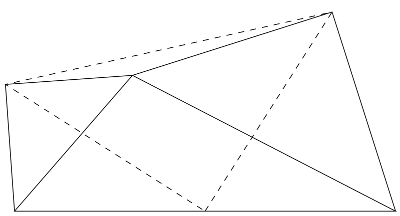
(Hinweis: *Betrachte Drehungen um* $120°$ *um die Punkte* A', B', C'.)

Aufgabe 8. *Sei* ABC *ein Dreieck mit allen Winkeln* $< 120°$. *Seien auf den Seiten* AB, BC *und* CA *gleichseitige Dreiecke* ABC', BCA' *und* CAB' *nach außen konstruiert.*



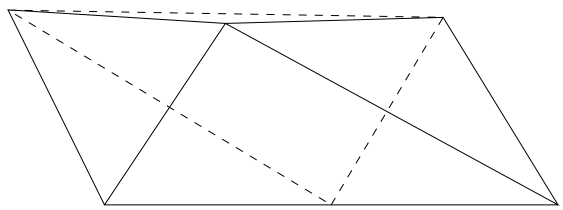
1. *Zeige, dass die Strecken* AA' *und* CC' *gleich lang sind und sich unter dem Winkel* $60°$ *schneiden.*
2. *Sei* O *der Schnittpunkt der Strecken* AA' *und* CC'. *Zeige:* $\angle BOA' = \angle BOC' = 60°$ *und folgere daraus, dass alle drei Strecken* AA', BB', CC' *gleich lang sind, sich in einem Punkt schneiden und dabei sechs Winkel je* $60°$ *bilden.*
3. *Zeige, dass* $AO + BO + CO = AA'$ *und dass der Punkt* O *die Summe der Abstände zu* A, B *und* C *minimiert.*

Aufgabe 9. *Sei* ABC *ein beliebiges Dreieck, und seien* ABC' *und* BCA' *gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke mit Hypotenusen* AB, *bzw.* BC, *nach außen von* ABC *konstruiert. Sei* B' *der Mittelpunkt der Seite* AC.



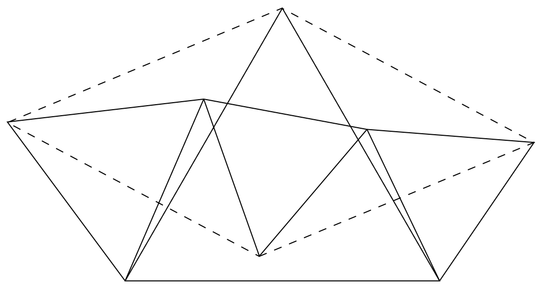
Man zeige, dass das Dreieck $A'B'C'$ ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse $A'C'$ ist.

Aufgabe 10. *Sei ABC ein beliebiges Dreieck, sei $A'BC$ das auf der Seite BC nach außen errichtete gleichseitige Dreieck, und sei C' der Schwerpunkt des auf AB nach außen errichteten Dreiecks.*



Sei außerdem B' der Mittelpunkt von AC. Zeige: das Dreieck $A'B'C'$ hat Winkel $30°, 60°, 90°$.

Aufgabe 11. *Auf den Seiten eines Vierecks $ABCD$ seien gleichseitige Dreiecke ABP_1, BCP_2, CDP_3 und DAP_4, sodass das erste und das dritte außerhalb des Vierecks liegen, und das zweite und das vierte nicht.*



Zeige: das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ ist ein Parallelogram.

Aufgabe 12. *Nehmen wir an, dass die positiven Zahlen a, b, c, d die folgende Eigenschaft besitzen: für ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a gibt es einen Punkt, der Abstände b, c, d von den Ecken dieses Dreiecks hat. Zeige: diese Eigenschaft bleibt erhalten, wenn man die Längen a, b, c, d vertauscht. Also, für ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge b gibt es einen Punkt,...*

3 Und noch etwas Theorie

Wir nehmen ohne Beweis Folgendes an: durch die Bilder von drei nicht-kollinearen Punkten ist eine Bewegung der Ebene eindeutig bestimmt.

Aufgabe 13. *Zeige, dass jede Bewegung der Ebene als Komposition von höchstens drei Geradenspiegelungen dargestellt werden kann.*

Aufgabe 14. *Zeige, dass jede Bewegung der Ebene entweder eine Verschiebung oder Drehung oder Geradenspiegelung oder Gleitspiegelung ist.*

Aufgabe 15. *Klassifiziere die Bewegungen des Raumes.*

Literatur

[1] Mathematische Sommerschule Kirov. `http://cdoosh.ru/lmsh/archive.html`. Russische Webseite (aufgerufen am 13.1.2020).

[2] I. M. Yaglom. *Geometric transformations.* Random House, 1962. Translated from the Russian by Allen Shields.