## 51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen II - Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 10. und 17. Jänner 2020

# Geometrische Transformationen 2: Ähnlichkeiten

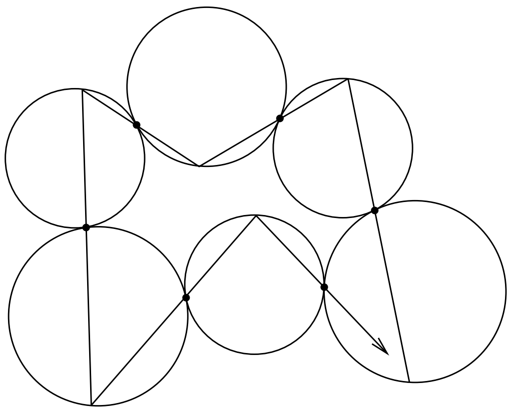
**Ivan Izmestiev**

Noch mehr zu Ähnlichkeitstransformationen gibt es in den Büchern [1, 2].

## 1 Komposition von Ähnlichkeitstransformationen

Wir fangen wieder mit einer Aufgabe an, deren Lösung am Ende dieses Abschnitts als einfach erscheinen soll.

**Aufgabe 1.** *In der Ebene sind sechs Kreise gezeichnet, so dass der $i$-te Kreis den $(i-1)$-ten und den $(i+1)$-ten (modulo 6) berührt, siehe Bild.*



*Man wählt einen Punkt auf dem ersten Kreis und zieht eine Gerade durch den Berührpunkt mit dem zweiten Kreis bis zum anderen Schnittpunkt mit dem zweiten Kreis. Von hier aus zieht man eine Gerade durch den Berührpunkt zwischen dem zweiten und den dritten Kreis usw. Zeige, dass man immer zum Startpunkt zurückkehrt.*

**Definition 2.** *Eine* Ähnlichkeitstransformation *ist eine Bijektion der Ebene auf sich, die alle Abstände mit dem selben Faktor multipliziert.*

Ähnlichkeitstransformationen mit Ähnlichkeitsfaktor 1 sind Bewegungen.
Für zwei ähnliche Dreiecke gibt es genau eine Ähnlichkeitstransformation, die einen in den anderen überführt. Eine Ähnlichkeitstransformation heißt *eigentlich* oder orientierungstreu, wenn sie den Umlaufsinn der Dreiecke erhält.
Beispiele von Ähnlichkeitstransformationen:

- Zentrische Streckung oder Homothetie $H_p^k$ mit Zentrum $p$ und Faktor $k$.
- Drehstreckung $RH_p^{\varphi,k}$ ist Komposition der Streckung $H_p^k$ mit der Drehung $R_p^\varphi$.

**Satz 3.** *Jede eigentliche Ähnlichkeitstransformation der Ebene ist entweder Identität oder Verschiebung oder Drehung oder Drehstreckung.*

Wir lassen diesen Satz ohne Beweis.
Ähnlich wie bei den Bewegungen gilt offensichtlich

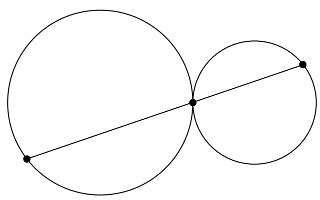
$$RH_p^{l,\psi} \circ RH_p^{k,\varphi} = RH_p^{kl,\varphi+\psi}.$$

Nach dem Klassifikationssatz soll die Komposition zweier Drehstreckungen mit verschiedenen Zentren wieder eine Drehstreckung oder Bewegung sein. Schaut man sich die Veränderung der Längen und der Richtungen an, so folgt hieraus die Regel:

$$RH_q^{l,\psi} \circ RH_p^{k,\varphi} = \begin{cases} RH_r^{kl,\varphi+\psi}, & \text{wenn } kl \neq 1 \text{ oder } \varphi + \psi \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \\ T_v, & \text{wenn } kl = 1 \text{ und } \varphi + \psi \equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases} \qquad (*)$$

**Aufgabe 4.** *Zuerst streckt man die Ebene mit Zentrum $A$ und Faktor 2, dann schrumpft man sie mit Zentrum $B$ und Faktor 2. Was passiert mit der Ebene? (Finde das heraus, ohne Formel $(*)$ anzuwenden.)*

Das Ergebnis kennt man aus dem hinein- und herauszoomen z. B. bei GoogleMaps.
Nun ein Hinweis zu Aufgabe 1:



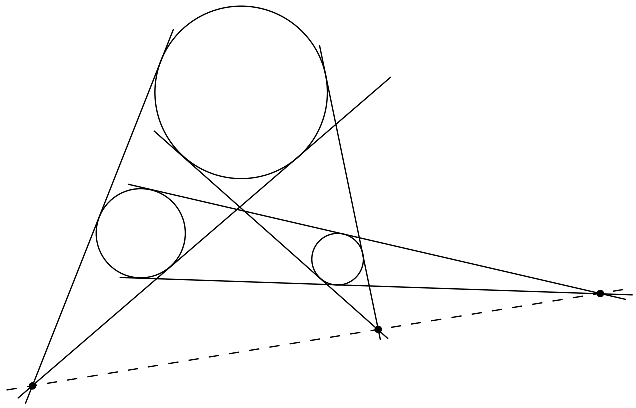
Die Vorschrift $A \mapsto A'$ bildet einen Kreis auf den anderen. Welche "vernünftige" Transformation der Ebene erfüllt $f(A) = A'$?
Im allgemeinen ist es nicht einfach, das neue Streckungszentrum $r$ in der ersten Zeile von $(*)$ zu bestimmen. Im folgenden Spezialfall gibt es eine Information.

**Satz 5.** *Komposition der Streckungen mit Zentren $p$ und $q$ ist*

- *Verschiebung parallel zur Geraden $pq$, wenn das Produkt der Faktoren gleich 1 ist;*
- *Streckung mit Zentrum auf der Geraden $pq$, wenn das Produkt der Faktoren ungleich 1 ist.*

*Beweis.* Laut Formel (∗) ist die Komposition eine Verschiebung oder zentrische Streckung, je nachdem ob das Produkt der Streckungsfaktoren gleich 1 ist oder nicht. Es geht nur darum, den Verschiebungsvektor bzw. Streckungszentrum zu ermitteln.
In beiden Fällen bleibt jeder Punkt der Geraden $pq$ auf dieser Geraden liegen. Deswegen kann die resultierende Verschiebung nur parallel zu $pq$ sein, bzw. das Streckungszentrum muss auf $pq$ liegen. □

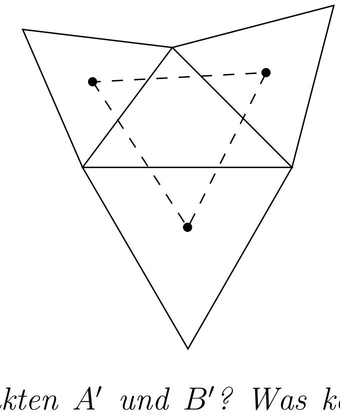
**Aufgabe 6.** *Bei drei beliebigen Kreisen zeichnet man zwei gemeinsame Tangenten für jedes Paar, wobei man solche Tangenten nimmt, welche beide sie berührenden Kreise auf derselben Seite haben.*



*Zeige, dass drei Schnittpunkte von Paaren der Tangenten auf einer Geraden liegen.*
*Für jedes Paar der Kreise markiere auch die Schnittpunkte der sie trennenden gemeinsamen Tangenten. Betrachte die drei neu markierten und die drei vorher markierten Punkte. Kann man weitere Geraden durch drei Punkte ziehen?*

**Aufgabe 7.** *Auf dem uns bekannten Bild unten betrachte die Komposition*

$$RH_B^{\frac{1}{\sqrt{3}},30^\circ} \circ RH_C^{\sqrt{3},30^\circ}.$$



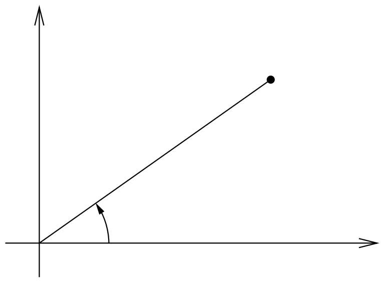
*Was passiert dabei mit den Punkten $A'$ und $B'$? Was kann man daraus über das Dreieck $A'B'C'$ schließen?*

## 2 Ähnlichkeitstransformationen und komplexe Zahlen

Erinnerung: eine komplexe Zahl $z = x + iy$ kann man umformen als

$$z = k(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad k = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Bezeichnung: $k = |z|$ der Betrag von $z$, und $\varphi = \arg z$ das Argument von $z$.



**Aufgabe 8.** *Durch direkte Rechnung und Additionssätze für trigonometrische Formeln zeige:*

$$|zw| = |z| \cdot |w|, \quad \arg(zw) \equiv \arg z + \arg w (\mathrm{mod} 2\pi).$$

Es folgt daraus

**Satz 9.** *Betrachtet man $\mathbb{C}$ als euklidische Ebene, so ist die Abbildung*

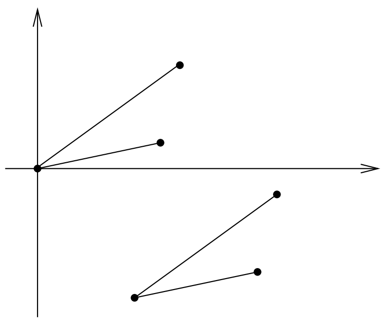
$$M_z\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad M_z(w) = zw$$

*die zentrische Streckung mit Zentrum $0$, Faktor $|z|$ und Winkel $\arg z$.*

**Aufgabe 10.** *Mit Hilfe der folgenden Skizze zeige, dass die Drehstreckung mit Zentrum $p$, Faktor $k$ und Winkel $\varphi$ in komplexen Zahlen durch die Formel*

$$RH_p^{k,\varphi}(w) = z(w - p) + p$$

*gegeben wird (hier ist $k = |z|$, $\varphi = \arg z$).*



**Aufgabe 11.** *Zeige, dass jede Abbildung der Form*

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(w) = aw + b,$$

*wobei $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, entweder eine Verschiebung oder Drehung oder Drehstreckung ist.*

**Aufgabe 12.** *Beweise, dass die Komposition der Drehstreckungen wieder eine Drehstreckung ist (Formel $(*)$).*

# Literatur


[1] I. M. Yaglom. *Geometric transformations. II.* Translated from the Russian by Allen Shields. Random House, New York; The L. W. Singer Co., Syracuse, N.Y., 1968.

[2] A. A. Zaslavsky, A. B. Skopenkov, and Skopenkov M. B., editors. *Elements of mathematics in problems. From olympiads and math clubs to profession.* 2018. in Russian.