51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen II-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 24. Jänner 2020

1. Es seien $x \geq y \geq z$ reelle Zahlen mit $xy + yz + zx = 1$.

   Beweise:
   $$xz < \frac{1}{2}$$
   Kann man den Wert $\frac{1}{2}$ verbessern?

2. Es seien a, b und c positive reelle Zahlen mit $abc = 8$. Beweise, dass
   $$\frac{ab+4}{a+2} + \frac{bc+4}{b+2} + \frac{ca+4}{c+2} \geq 6$$
   gilt und gib an, wann Gleichheit eintritt.[1, JBMO Shortlist 2016]

3. Es seien a, b, c, d reelle Zahlen mit
   $$abc - d = 1, \quad bcd - a = 2, \quad cda - b = 3, \quad dab - c = -6.$$
   Beweise [1, JBMO Shortlist 2010]:
   $$a + b + c + d \neq 0$$

4. (Team Selection Test 2013, Niederlande)

   Es seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $abc = 1$. Beweise:
   $$a + b + c \geq \sqrt{\frac{1}{3}(a+2)(b+2)(c+2)}$$
   Wann gilt Gleichheit?

5. Man bestimme den kleinsten Wert, den
   $$\frac{a+1}{a(a+2)} + \frac{b+1}{b(b+2)} + \frac{c+1}{c(c+2)}$$
   für positive reelle Zahlen a, b, c mit $a + b + c \leq 3$ annimmt.[5, RWF 2003, Gerd Baron]

6. Es seien x, y, z positive reelle Zahlen mit $x^2 + y^2 + z^2 + 9 = 4(x + y + z)$.

   Beweise[2, MEMO 2009]:
   $$x^4 + y^4 + z^4 + 16(x^2 + y^2 + z^2) \geq 8(x^3 + y^3 + z^3) + 27$$

7. Es seien AA_1 und CC_1 die Höhen in einem spitzwinkeligen Dreieck ABC mit A_1 auf BC und C_1 auf AB.- Die Gerade durch die Inkreismittelpunkte der Dreiecke ACC_1 und ACA_1 schneidet die Seite AB in X und die SeiteBC in Y.

   Beweise BX = BY

8. (Team Selection Test 1999, Rumänien) Es seien x, y und z positive reelle Zahlen mit $xyz = 1$ und
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq x + y + z.$$
   Zeige, das dann auch für alle positiven ganzen Zahlen k die Ungleichung
$$\frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{{}^k z} \geq x^k + y^k + z^k$$
   gilt.

9. Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_9$ nichtnegative ganze Zahlen, für die gilt:
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_9^2 \geq 25.$$
   Man beweise, dass es drei dieser Zahlen gibt, deren Summe mindestens 5 ist.[4, RWF 2017, Karl Czackler]

10. Es seien a, b, c und d reelle Zahlen mit $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Man beweise, dass die Ungleichung
$$(a + 2)(b + 2) \geq cd$$
    gilt und man gebe vier Zahlen a, b, c und d an, für die Gleichheit gilt.[3, RWF 2016, Walther Janous]

Literatur

[1] Information zur Junior Balkan Mathematical Olympiad (JBMO). `https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Junior_Balkan_Mathematical_Olympiad`. (aufgerufen am 22.1.2020).

[2] Liste aller Mitteleuropäischen Mathematik Olympiade-Wettbewerben (MEMO). `https://memo-official.org/MEMO/contests/previous/`. (aufgerufen am 22.1.2020).

[3] Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene 2016. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/149`. (aufgerufen am 22.1.2020).

[4] Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene 2017. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/300`. (aufgerufen am 22.1.2020).

[5] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2000-2008: Aufgaben und Lösungen.* Nova MD, 2018. Auflage 1.3.