51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen II - Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 20. März 2020

Aufgaben zu Polynomen

1. Man löse die Gleichung
$$x^4y^3(y-x) = x^3y^4 - 216$$
in ganzen Zahlen.

2. Man beweise für alle reellen Zahlen a die Ungleichung
$$a + a^3 - a^4 - a^6 < 1.$$

3. Man bestimme alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die die Gleichung
$$4x^4 - x^2(4y^4 + 4z^4 - 1) - 2xyz + y^8 + 2y^4z^4 + y^2z^2 + z^8 = 0$$
erfüllen.

4. Man bestimme alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung
$$(x-1)x(x+1) + (y-1)y(y+1) = 24 - 9xy.$$

5. Finde alle n, sodass
$$n^{10} + n^5 + 1$$
eine Primzahl ist.

Für Lösungsvorschläge und Fragen bitte eine E-Mail an steininger.jakob@yahoo.com schreiben.

51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen II - Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 24. März 2020

Hinweise zum Aufgabenblatt vom 20. März

- Alle Terme sind durch x^3y^3 teilbar. $\Rightarrow x^3y^3|216 \Rightarrow xy|6$.
- Zunächst, die linke Seite ist kleiner-gleich 0 wenn $a \leq 0$ oder $a \geq 1$. Für $a \in (0,1)$ kann man die Ungleichung verschärfen zu

  $$a + a^3 - a^4 < 1.$$

  Nachdem man alle Terme auf eine Seite bringt, kann man faktorisieren...
- Fast alle Exponenten sind gerade, deshalb scheint die linke Seite generell größer als Null zu sein. Idee: Man schreibt die linke Seite als Summe von vollständigen Quadraten.
- Nachdem alle Terme auf eine Seite gebracht sind, versucht man das Polynom zu faktorisieren. Um einen geeigneten Faktor zu finden, ist es hilfreich, sich einige Lösungen auszurechnen und in diesen ein Muster zu erkennen.
- Man versucht dieses Polynom zu schreiben als Produkt zweier Polynome. Nützlich dabei ist die geometrische Reihe

  $$n^{10} + n^5 + 1 = \frac{n^{15} - 1}{n^5 - 1}.$$

51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen II - Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 27. März 2020

Lösungsskizzen zum Aufgabenblatt vom 20. März

1. Man löse die Gleichung
$$x^4y^3(y-x)=x^3y^4-216$$
in ganzen Zahlen. [2, BF 2012, Problem 2]

   Lösung. Zunächst merkt man, dass alle Terme durch x^3y^3 teilbar sind und damit $x^3y^3|216=6^3$ gilt. Daraus ergibt sich weiter $xy|6$. Offensichtlich gibt es keine Lösung mit $x=0$ oder $y=0$. Nun kann man alle Paare (x,y) mit $xy|6$ in die urspüngliche Gleichung einsetzten und testen, ob es sich tatsächlich um ein Lösungspaar handelt. Man findet die 3 Lösungspaare $(-3,-2)$, $(2,3)$ und $(1,6)$.

2. Man beweise für alle reellen Zahlen a die Ungleichung
$$a+a^3-a^4-a^6<1.$$
[2, GF 2012, Problem 1]

   Lösung. Die Ungleichung stimmt offensichtlich für $a\leq 0$ und $a\geq 1$. Für $a\in(0,1)$ verschärfe die Ungleichung zu
$$a+a^3-a^4-1<0.$$
Die kann zu $(a-1)^2(a^2+a+1)>0$ faktorisiert werden und ist tatsächlich für alle $a\in(0,1)$ erfüllt.

3. Man bestimme alle Tripel (x,y,z) reeller Zahlen, die die Gleichung
$$4x^4-x^2(4y^4+4z^4-1)-2xyz+y^8+2y^4z^4+y^2z^2+z^8=0$$
erfüllen. [2, GF 2010, Problem 2]

   Lösung. Wie der Hinweis schon verraten hat, versucht man das Polynom als Summe von vollständigen Quadraten zu schreiben. Es gibt genau 3 Terme mit negativem Vorzeichen, nämlich $-4x^2y^4$, $-4x^2z^4$ und $-2xyz$, die in den Quadraten “untergebracht” werden müssen. Wenn man mit dem letzten beginnt merkt man $(x-yz)^2 = x^2 - 2xyz + y^2z^2$. Subtrahiert man dies von der Angabe, kann man den Rest schreiben als $(2x^2 - y^4 - z^4)^2$, sprich

$$\begin{aligned} 0 &= 4x^4 - x^2(4y^4 + 4z^4 - 1) - 2xyz + y^8 + 2y^4z^4 + y^2z^2 + z^8 \\ &= (2x^2 - y^4 - z^4)^2 + (x-yz)^2 \end{aligned}$$

Man erhält also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x^2 &= y^4 + z^4 \\ x &= yz. \end{aligned}$$

Setzt man die $xy = z$ in die ursprüngliche Gleichung ein, erhält man $(y^2 - z^2)^2 = 0$, also $y = \pm z$. Nach einigen weiteren Überlegungen stellt man fest, dass die Lösungsmenge für (x, y, z) gleich

$$\{(t^2, t, t) | t \in \mathbb{R}\} \cup \{(-t^2, t, -t) | t \in \mathbb{R}\}$$

ist.

4. Man bestimme alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$(x-1)x(x+1) + (y-1)y(y+1) = 24 - 9xy.$$

[2, GF 2012, Problem 2]
Lösung. Nachdem man sich einige Lösungen, zum Beispiel mit $-5 \leq x, y \leq 5$, ausrechnet, merkt man, dass die meisten Lösungen $x + y = 3$ erfüllen. Deshalb versucht man $(x+y-3)$ als Linearfaktor vom ursprünglichen Polynom abzuspalten. Tatsächlich findet man

$$(x-1)x(x+1)+(y-1)y(y+1)-24+9xy = (x+y-3)(x^2+y^2+3x+3y-xy+8) = 0.$$

Dadurch merkt man, dass alle ganzzahligen x, y mit $x + y = 3$ eine Lösung sind. Alle weiteren Lösungen erfüllen

$$x^2 + x(3-y) + y^2 + 3y + 8 = 0.$$

Betrachtet man dies als quadratische Gleichung in x, erhält man als Diskriminante

$$-3(y+3)^2 + 4.$$

Weiter Lösungen kann es also nur geben, wenn diese Diskriminante nicht negativ ist. Dies ist nur der Fall, wenn $y+3 \in \{-1, 0, 1\}$. Dies führ zu 3 quadratischen Gleichungen in x. Man erhält die weiteren Lösungspaare $(-2,-3), (-4,-3), (-3,-2), (-2,-2), (-3,-4)$ und $(-4,-4)$.

5. Finde alle n, sodass
$$n^{10} + n^5 + 1$$
eine Primzahl ist.[1, ÖPMW 2004, Problem 4]

Lösung. Bei $n = 1$ erhält man die Primzahl 3 und wir vermuten, dass dies die einzige Lösung ist. Man versucht nun das Polynom zu faktorisieren. Es gilt
$$n^{10} + n^5 + 1 = \frac{n^{15} - 1}{n^5 - 1} = \frac{n^{15} - 1}{(n-1)(n^4 + n^3 + n^2 + n + 1)}.$$
Deshalb teilt jedes Polynom, dass das ursprüngliche Polynom teilt, auch $n^{15} - 1$. Weiters gilt
$$\begin{aligned}\frac{n^{15} - 1}{(n-1)(n^4 + n^3 + n^2 + n + 1)} &= \frac{(n^3 - 1)(n^{12} + n^9 + n^6 + n^3 + 1)}{(n-1)(n^4 + n^3 + n^2 + n + 1)} \\ &= \frac{(n-1)(n^2 + n + 1)(n^{12} + n^9 + n^6 + n^3 + 1)}{(n-1)(n^4 + n^3 + n^2 + n + 1)} \\ &= \frac{(n^2 + n + 1)(n^{12} + n^9 + n^6 + n^3 + 1)}{n^4 + n^3 + n^2 + n + 1}\end{aligned}$$
Deshalb vermutet man $n^2 + n + 1$ als Faktor des ursprünglichen Polynoms. Nach Polynomdivision erhält man tatsächlich
$$n^{10} + n^5 + 1 = (n^8 - n^7 + n^5 - n^4 + n^3 - n + 1)(n^2 + n + 1).$$
Da für $n > 1$ beide Faktoren größer als 1 sind, kann $n^{10} + n^5 + 1$ keine Primzahl sein.

Für die sehr interessierten die mit komplexen Zahlen geübt sind: Es gäbe eine weitere sehr elegante Lösung, die darauf beruht $n^{10} + n^5 + 1$ komplex zu faktorisieren...

Literatur

[1] 27. Österreichisch-Polnischer Mathematik Wettbewerb, 2004.

[2] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2009-2018: Aufgaben und Lösungen.* Nova MD, 2019.