50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 8. März 2019

1. Wir betrachten ein rechtwinkeliges Dreieck ABC mit rechtem Winkel in C. Sei F der Fußpunkt der Höhe durch C (auf AB). Die Punkte D und E seien die Mittelpunkte der Strecken CF bzw. AF. Man zeige, dass $\angle CBD = \angle ACE$

2. Gegeben ist ein spitzwinkeliges Dreieck ABC. Im Mittelpunkt der Seite BC wird die Normale errichtet. Diese schneidet AC im Punkt M. Im Mittelpunkt der Seite AC wird ebenfalls die Normale errichtet. Diese schneidet BC in N. Es sei O der Umkreismittelpunkt von ABC. Zeige: A, B, N, O, M liegen auf einem Kreis.

3. In einem Parallelogramm $ABCD$ werden auf den Seiten AB und BC die Punkte E und F so gewählt, dass sie mit keinem Eckpunkt zusammenfallen und die Strecken AE und FC gleich lang sind. Der Schnittpunkt der Strecken AF und CE wird mit G bezeichnet. Beweise, dass DG den Winkel ADC halbiert.

4. Es seien k und l zwei Kreise, welche sich in A und B schneiden. Es sei P ein Punkt auf k, PA und PB schneiden l jeweils ein zweites Mal in Q bzw. R. Zeige: QR steht normal auf den Durchmesser von k, der P enthält.

5. Es sei ABC ein Dreieck mit $AC > AB$ und dem Umkreismittelpunkt U. Die Tangenten an den Umkreis in den Punkten A und B schneiden einander im Punkt T. Die Symmetrale der Seite BC schneidet die Seite AC im Punkt S. Man zeige: Die Gerade ST ist parallel zur Seite BC.

6. Man bestimme alle reellen Zahlen x, für die folgende Ungleichung gilt:
$$(x-1)^2(x-4)^2 < (x-2)^2$$

7. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$:
$$-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1.$$

8. Man zeige für alle positiven x und y:
$$\frac{(x+y)^2}{16} + 1 \geq \sqrt{xy}.$$

9. Man zeige fur alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ mit $a + b + c = 1$:
$$(a + \frac{1}{a})^2 + (b + \frac{1}{b})^2 + (c + \frac{1}{c})^2 \geq \frac{100}{3}$$