50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs „Mathematik macht Freu(n)de" 19. Oktober 2018

Die Mittelungleichungen für zwei Variable: Es seien x_1, x_2 positive reelle Zahlen. Es gilt:

$$max(x_1, x_2) \geq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \geq \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} \geq min(x_1, x_2)$$

$$QM \geq AM \geq GM \geq HM$$

Quadratisches Mittel$\geq$ Arithmetisches Mittel $\geq$

Geometrisches Mittel $\geq$ Harmonisches Mittel

Gleichheit für $x_1 = x_2$.

Mit diesen Mittelungleichungen oder durch entsprechende Äquivalenzumformungen beweist man unmittelbar folgende Ungleichungen, die zum Grundwissen gehören:

$$\begin{aligned}
a + 1 &\geq 2\sqrt{a} \qquad a \in \mathbb{R}^+, \qquad Gleichheit\ f\ddot{u}r\ a = 1 && (1)\\
\frac{a}{b} + \frac{b}{a} &\geq 2 \qquad a, b \in \mathbb{R}^+, \qquad Gleichheit\ f\ddot{u}r\ a = b && (2)\\
x + \frac{1}{x} &\geq 2 \qquad x \in \mathbb{R}^+, \qquad Gleichheit\ f\ddot{u}r\ x = 1 && (3)\\
(a + b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) &\geq 4 \qquad a, b \in \mathbb{R}^+, \qquad Gleichheit\ f\ddot{u}r\ a = b && (4)\\
(a + b)(b + c)(c + a) &\geq 8abc \qquad a, b, c \in \mathbb{R}^+, \qquad Gleichheit\ f\ddot{u}r\ a = b = c && (5)\\
a^2 + b^2 + c^2 &\geq ab + bc + ca \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, \qquad Gleichheit\ f\ddot{u}r\ a = b = c && (6)\\
(a + b + c)^2 &\geq 3(ab + bc + ca) \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, \qquad Gleichheit\ f\ddot{u}r\ a = b = c && (7)\\
3(a^2 + b^2 + c^2) &\geq (a + b + c)^2 \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, \qquad Gleichheit\ f\ddot{u}r\ a = b = c && (8)\\
\sqrt{(a + c)(b + d)} &\geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}^+, \qquad Gleichheit\ f\ddot{u}r\ bc = ad && (9)\\
\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} &\geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \qquad a, b \in \mathbb{R}^+, \qquad Gleichheit\ f\ddot{u}r\ a = b && (10)
\end{aligned}$$

1. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8$$

2. Beweise für alle positiven reellen Zahlen a, b:

$$\frac{a^3 + b^6}{2} \geq 3ab^2 - 4$$

Wann gilt Gleichheit?

3. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 3\sqrt{2}$$

Wann gilt Gleichheit?

4. Man zeige für alle reellen a, b:

$$a^4 + b^4 + 2 \geq 4ab$$

5. Man zeige für alle reellen a:

$$1 + 2a^4 \geq a^2 + 2a^3$$

6. Man zeige für alle positiven reellen a, b:

$$\frac{a^3 + b^6}{2} \geq 3ab^2 - 4$$

7. Beweise für alle positiven reellen Zahlen a, b :

$$\frac{(a+b)^3}{a^2 b} \geq \frac{27}{4}$$

8. Beweise für alle positiven reellen Zahlen a, b :

$$27(a+b)^4 \geq 256a^3 b$$

9. Es seien x, y und z positive reelle Zahlen mit $x+y+z = 3$. Man beweise, dass mindestens eine der drei Zahlen

$$x(x+y-z); \quad y(y+z-x) \quad \text{oder} \quad z(z+x-y)$$

kleiner oder gleich 1 ist. (GWF 2015, Karl Czakler)

10. Es seien a und b nichtnegative reelle Zahlen mit $a + b < 2$. Man beweise die folgende Ungleichung:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab}$$

Für welche a, b gilt Gleichheit? (GWF 2018, Gottfried Perz)