



50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs (F) „Mathematik macht Freu(n)de“

12. April 2019

1. Stelle ein Bildungsgesetz für die Fibonacci - Folge $(0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots)$ auf!
2. Stelle ein Bildungsgesetz für die Folge (a_n) mit $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$ auf und beweise, dass in der Folge unendlich viele Primzahlen vorkommen!
3. Für die beiden Zahlenfolgen (a_n) und (b_n) gilt $a_0 = b_0 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ und $b_{n+1} = a_{n+1} + b_n$. Stelle ein Bildungsgesetz für (a_n) auf!
4. Gegeben ist ein Stück Papier. Es wird in acht oder zwölf beliebige Stücke zerschnitten. Jedes der entstandenen Stücke darf man wieder in acht oder zwölf Stücke zerschneiden oder unzerschnitten lassen, usw. Kann man auf diese Weise 60 Stücke bekommen? Man zeige, dass man jede beliebige Anzahl, die größer als 60 ist, erhalten kann.
5. Sei M eine Menge von mindestens zwei Punkten in der Ebene. Für je zwei Punkte in M liegt der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke dieser Punkte wieder in M . Umgekehrt ist jeder Punkt von M ein Mittelpunkt einer Verbindungsstrecke zweier unterschiedlicher Punkte aus M .
Man zeige, dass M unendlich viele Punkte enthält!
6. Wir erfinden eine neue Schachfigur, den Esel. In einem Zug wechselt der Esel zunächst zu einem Nachbarfeld und bewegt sich dann normal zum ersten Schritt um drei Felder weiter. Er darf, z.B., vom Feld A1 auf das Feld B4 gehen. Am Anfang steht der Esel auf dem Feld A1. Kann er nun (in einem oder mehreren Zügen) das Feld A8 erreichen?
7. Wählt man unter den ersten $2 \cdot n$ Zahlen auf beliebige Art $n + 1$ aus, so finden sich darunter immer zwei Zahlen, sodass die eine ein Vielfaches der anderen ist.
(Paul Erdős)
8. Nim-Spiel: Die Spieler A und B entfernen abwechselnd Streichhölzer und zwar bei jedem Zug beliebig viele, aber nur aus einer Reihe.

I
III
IIII
IIIIII

- a) Man zeige, dass es eine Gewinnstrategie für B gibt.
 - b) Wie muss sich die Angabe ändern, damit A eine Gewinnstrategie hat?
9. Es seien a , b und c natürliche Zahlen mit der Summe 70. Man bestimme den größten Wert, den das Produkt $P = abc$ annehmen kann.