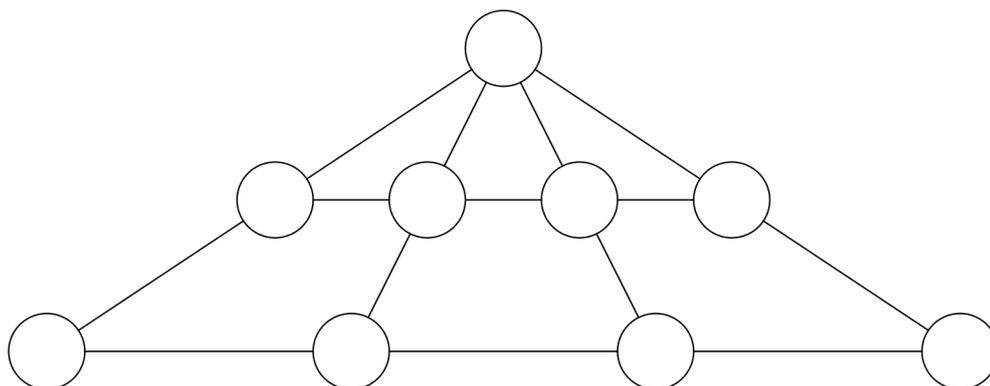


## 50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs (F) „Mathematik macht Freu(n)de“

14. Dezember 2018

1. Wie viele Elemente hat die Menge  $\{19, 20, \dots, 2019\}$ ? Wie viele davon sind gerade, wie viele ungerade? Wie viele dieser Elemente sind Quadratzahlen?  
(Kanon Anfänger, abgeändert)
2. Wie viele Ziffern muss man schreiben, wenn man die Zahlen von 1 bis 2019 anschreibt?  
(Kanon Anfänger, abgeändert)
3. Wie viele verschiedene ganze Zahlen  $n$  mit  $1 \leq n \leq 10$  muss man mindestens zufällig wählen, damit sicher eine gerade Zahl dabei ist?  
(Kanon Fortgeschrittene, abgeändert)
4. Unter sechs Personen sind manche miteinander befreundet und manche nicht miteinander befreundet. Man zeige, dass es drei Personen gibt, die entweder alle miteinander befreundet sind oder alle drei nicht miteinander befreundet sind.  
(Kanon Fortgeschrittene, abgeändert)
5. Wir betrachten folgende Figur:



Wir suchen Beschriftungen der neun Felder in der Figur mit den Zahlen  $1, 2, \dots, 9$ . Dabei soll jede dieser Zahlen genau einmal verwendet werden. Weiters sollen die sechs Summen von jeweils drei bzw. vier Zahlen längs der eingezeichneten geraden Verbindungen gleich sein.

Man gebe eine solche Beschriftung an.

Man zeige, dass bei allen solchen Beschriftungen im obersten Feld dieselbe Zahl steht.

Wie viele solche Beschriftungen gibt es insgesamt?

(Landeswettbewerb für Anfänger, 2016)

6. Sei  $n$  eine gerade positive ganze Zahl.  
Wir betrachten Rechtecke mit den Seitenlängen  $k$  und  $k+1$ , wobei  $k$  größer als  $\frac{n}{2}$  und höchstens gleich  $n$  ist.  
Man zeige: Für alle geraden positiven ganzen Zahlen  $n$  ist die Summe der Flächen der jeweils betrachteten Rechtecke gleich  $\frac{n(n+2)(7n+4)}{24}$ .  
(Landeswettbewerb für Anfänger, 2006)