50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs (F) „Mathematik macht Freu(n)de“ 15. Februar 2019

1. Man beweise, dass es keine positiven ganzen Zahlen x und y gibt, für die gilt:
   $13x^3 + 2019 = y^3$.
2. Man bestimme alle Paare von positiven ganzen Zahlen x und y, für die gilt:
   $x^2 + 89x = y^2 - 2019$.
3. Man bestimme alle (im dekadischen System) vierstelligen, natürlichen Zahlen n, die folgende Eigenschaften haben:
   - n hat genau 20 positive Teiler,
   - n ist durch 19 teilbar.
4. Man bestimme alle Paare (x, y) von ganzen Zahlen, für die gilt: $x^3 - y^3 = 19$.
5. Man bestimme alle Paare (x, y) von ganzen Zahlen, für die gilt:
   a) $x^4 - y^4 = 607$,
   b) $x^4 - y^4 = 609$.
6. Man bestimme alle Paare (x, y) von ganzen Zahlen, für die gilt: $x^4 - y^4 = 3150$.
7. Man berechne die letzten zwei Ziffern der Zahl $(19^{20})^{2019}$.
8. Man beweise: $\frac{2019^{18}-1}{19}$ ist eine ganze Zahl.
9. Man beweise, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt: Es gibt keine natürliche Zahl r, sodass $3 \cdot 4^n + 4 \cdot n^4 = 5r$ gilt.
   (Gebietswettbewerb 1974)
10. Man zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n der Term $2^{2n} + 24n - 10$ durch 18 teilbar ist.
    (Bundeswettbewerb 1972)