50. Österreichische Mathematik-Olympiade

16.November 2018

Vorbereitungskurs (**F**) „Mathematik macht Freu(n)de“

F_2018_11_16

1.) Eine Folge $\langle a_n \rangle_{n\geq 0}$ von Zahlen ist gegeben durch $a_0 = 1$; $a_1 = 3$ und $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Zeige, dass a_{2018} durch 4 teilbar ist.	
2.) Eine Folge $\langle a_n \rangle$ ganzer Zahlen mit $n \geq 1$ ist durch $a_{n+1} = a_n^3 + 2019$ gegeben. Zeige: Es gibt höchstens ein n, sodass a_n eine Quadratzahl ist.	Andreescu:Number Theory S 191/9.3.17 bzw. Österr.-Polen - Wettb.1999
3.) Löse die „Pythagoreische Gleichung“ $x^2 + y^2 = z^2$ in den ganzen Zahlen.	
4.) Löse in Z^+: $4x^2 - 7 = y^2$	
5.) Bestimme die Summe $S = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots\ldots + \frac{1}{2017\cdot 2019}$	
6.) Löse in den ganzen Zahlen $\frac{x^2+3x}{2x-1} = y$	
7.) Für welche ganze Zahl a hat die Gleichung $x^3 + (a-3)x^2 + (-3-3a)x + 8 = 0$ mindestens eine ganzzahlige Lösung?	Ballik Z 5.20
8.) Löse in den ganzen Zahlen $k^2 - 2016 = 3^n$ *Beachte, dass* $2016 = 2^5.3^2.7$	GW 2016
9.) Löse in Z: $x^2 + x = xy + y + 19$	EB
10.) Faktorisiere $a^4 + 4b^4$	Sophie Germain
11.) Zeige, dass $n^4 + 4^n$ für keine natürliche Zahl $n > 1$ eine Primzahl ist.	Engel: Problem-Solving Strategies S 121 E1