



50. Österreichische Mathematik-Olympiade

17.Mai 2019

Vorbereitungskurs (F) „Mathematik macht Freu(n)de“

F_2019_05_17

<p>1.) Seien I bzw. I_a Mittelpunkte des Inkreises k bzw. des Ankreises k_a des Dreiecks ABC. Zeige, dass der Schnittpunkt der Strecke II_a mit dem Umkreis des Dreiecks ABC die Strecke II_a halbiert.</p>	<p>Deutsche Mathematik-Olympiade 2017/2018</p>
<p>2.) Löse das System in den reellen Zahlen:</p> $x\sqrt{1-y^2} = \frac{1}{4}(\sqrt{3}+1)$ $y\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)$	<p>Deutsche Mathematik-Olympiade 2016/2017</p>
<p>3.) Für $0 \leq a < \sqrt{b} < a+1$ gilt:</p> $\sqrt{b} > a + \frac{b-a^2}{2a+1}$	<p>Hermann; Kucera; Simsa Equations & Inequalities</p>
<p>4.) Sei $k > 2$ und a, b, c die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks (c ist die Hypotenuse). Dann gilt: $a^k + b^k < c^k$</p>	<p>Hermann; Kucera; Simsa Equations & Inequalities S97</p>
<p>5.) AB ist die Sehne eines Kreises und E ein innerer Punkt von AB. Durch E geht die Sehne CD. Der Punkt M liegt im Inneren der Strecke EB. Auf dem Kreis k liegen die Punkte $D; E; M$. Die Tangente an k in E sei t. t schneidet BC in F und t schneidet AC in G. Das Verhältnis $AM:AB = \lambda$. Wie groß (ausgedrückt mit Hilfe der Größe λ) ist $EG:EF$?</p>	<p>IMO 1990</p>
<p>6.) Gegeben ist die Gleichung $x^2 + 4z^2 + 6x + 7y + 8z = 1$. Man bestimme alle ganzzahligen Lösungstriple $(x; y; z)$ mit $y \geq 0$.</p>	
<p>7.) Zeige, dass die Menge $M = \{1; 2; 3; \dots; n\}$ gleich viele Teilmengen mit gerader wie mit ungerader Elementanzahl besitzt.</p>	<p>Kirschenhofer 2003 Fortbildungsseminar Mariazell</p>
<p>8.) Bestimme alle Paare natürlicher Zahlen $(x; y)$, für die $(x+y)! = (xy)!$ gilt.</p>	<p>Baron Mariazell 2003</p>
<p>9.) Gegeben ist die Menge $M = \{1; 2; 3; \dots; n\}$ mit $n > 2$. Man denke sich alle zweielementigen Teilmengen angeschrieben und in diesen das jeweils kleinste Element gefärbt. Wie groß ist der Mittelwert (arithmetisches Mittel) aller eingefärbten Elemente?</p>	<p>aus IMO 1981</p>
<p>10.) Seien a, b, c positive ganze Zahlen. Kann $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ eine Primzahl sein?</p>	