50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 19. Oktober 2018 Die

Mittelungleichungen für zwei Variable: Es seien x_1, x_2 positive reelle Zahlen. Es gilt:

$$max(x_1, x_2) \geq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \geq \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} \geq min(x_1, x_2)$$

$$QM \geq AM \geq GM \geq HM$$

Quadratisches Mittel$\geq$ Arithmetisches Mittel $\geq$

Geometrisches Mittel $\geq$ Harmonisches Mittel

Gleichheit für $x_1 = x_2$.

Mit diesen Mittelungleichungen oder durch entsprechende Äquivalenzumformungen beweist man unmittelbar folgende Ungleichungen, die zum Grundwissen gehören:

$$\begin{aligned}
a+1 &\geq 2\sqrt{a} \qquad a \in \mathbb{R}^+, \qquad Gleichheit\ für\ a=1 && (1)\\
\frac{a}{b}+\frac{b}{a} &\geq 2 \qquad a,b \in \mathbb{R}^+, \qquad Gleichheit\ für\ a=b && (2)\\
x+\frac{1}{x} &\geq 2 \qquad x \in \mathbb{R}^+, \qquad Gleichheit\ für\ x=1 && (3)\\
(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) &\geq 4 \qquad a,b \in \mathbb{R}^+, \qquad Gleichheit\ für\ a=b && (4)\\
(a+b)(b+c)(c+a) &\geq 8abc \qquad a,b,c \in \mathbb{R}^+, \qquad Gleichheit\ für\ a=b=c && (5)\\
a^2+b^2+c^2 &\geq ab+bc+ca \qquad a,b,c \in \mathbb{R}, \qquad Gleichheit\ für\ a=b=c && (6)\\
(a+b+c)^2 &\geq 3(ab+bc+ca) \qquad a,b,c \in \mathbb{R}, \qquad Gleichheit\ für\ a=b=c && (7)\\
3(a^2+b^2+c^2) &\geq (a+b+c)^2 \qquad a,b,c \in \mathbb{R}, \qquad Gleichheit\ für\ a=b=c && (8)\\
\sqrt{(a+c)(b+d)} &\geq \sqrt{ab}+\sqrt{cd} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{R}^+, \qquad Gleichheit\ für\ bc=ad && (9)\\
\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2} &\geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \qquad a,b \in \mathbb{R}^+, \qquad Gleichheit\ für\ a=b && (10)
\end{aligned}$$

1. Es seien a, b, c, d positive reelle Zahlen. Beweise:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq (a + b + c)d$$

2. Es sei a eine reelle Zahl. Beweise:

$$4a - a^4 \leq 3$$

3. Es seien a, b, c, d reelle Zahlen. Beweise, dass von den Zahlen $a - b^2$, $b - c^2, c - d^2$ und $d - a^2$ nicht alle größer als $\frac{1}{4}$sein können.
4. Es seien a, b reelle Zahlen. Beweise:

$$a^2 + b^2 + ab \geq 3(a + b - 1)$$

5. Es seien a, b, c und d reelle Zahlen mit $a < b < c < d$. Man ordne $x = a \cdot b + c \cdot d, y = b \cdot c + a \cdot d$ und $z = c \cdot a + b \cdot d$ der Größe nach und beweise die angegebene Reihenfolge.
6. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8$$

7. Es seien a, b positive reelle Zahlen. Beweise:

$$a^3 + b^3 + a + b \geq 4ab$$

8. Fr welche reelle Zahl a gilt, dass für alle reellen Zahlen x der Ausdruck

$$\frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + 4x + 8} < 8$$

   ist.
9. Es seien x, y positive reelle Zahlen mit $x + y + xy = 3$. Man beweise, dass $x + y \geq 2$
10. Es seien x, y positive reelle Zahlen mit $x + y = 1$. Man beweise:

$$\frac{(3x - 1)^2}{x} + \frac{(3y - 1)^2}{y} \geq 1$$

11. Gegeben sei ein Dreieck mit den Seiten a = 6cm und b = 17cm. Die dritte Seite c ist auch ganzzahlig. Bestimme den kleinstmöglichen Umfang eines solchen Dreiecks.
12. Welche der beiden Zahlen $\sqrt{a} - \sqrt{a - 1}$ oder $\sqrt{a + 1} - \sqrt{a}$ ist für $a > 1$ größer?
13. Sei a eine reelle Zahl. Man zeige: Hat die Gleichung $x^2 - ax + a = 0$ reelle Lösungen x_1, x_2, so gilt:

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 2(x_1 + x_2)$$

14. Man zeige für alle positiven reellen Zahlen x, y:

$$\frac{x^2}{y} + x + y \geq 3x$$