50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 22. Februar 2019

1. Es sei ABC ein gleichschenkeliges Dreieck mit $AC = BC$. Auf dem Bogen CA seines Umkreises, der B nicht enthält, liege ein Punkt P. Der Fußpunkt der Normalen durch C auf die Gerade AP werde mit E bezeichnet, der Fußpunkt der Normalen durch C auf die Gerade BP werde mit F bezeichnet.

   Man beweise, dass die Strecken AE und BF gleich lang sind.

2. Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit $\overline{AB} = \overline{BD}$, E sei der Lotfußpunkt aus B auf AC.

   Beweise: $\overline{AE} = \overline{EC} + \overline{CD}$.

3. Der Punkt O liegt so im Inneren des Parallelogramms $ABCD$, dass $\angle AOB + \angle COD = 180°$.

   Beweise: $\angle CBO = \angle ODC$.

4. In jedem konvexen Viereck $ABCD$ mit den Seitenlängen a, b, c, d und der Fläche $A = [ABCD]$ gelten folgende Beziehungen:

$$(a)\ A \leq \frac{ab + cd}{2} \qquad (b)\ A \leq \frac{ac + bd}{2} \qquad (c)\ A \leq \frac{1}{4}(a + b)(c + d)$$

5. Es seien AA_1 und CC_1 die Höhen in einem spitzwinkeligen Dreieck ABC mit A_1 auf BC und C_1 auf AB.- Die Gerade durch die Inkreismittelpunkte der Dreiecke ACC_1 und ACA_1 schneidet die Seite AB in X und die Seite BC in Y.

   Beweise BX = BY

6. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen . Beweise:

$$\frac{1}{b(a + b)} + \frac{1}{c(b + c)} + \frac{1}{a(c + a)} \geq \frac{27}{2(a + b + c)^2}$$

7. In jedem konvexen Fünfeck kann man drei Diagonalen so auswählen, dass man aus ihnen ein Dreieck konstruieren kann.

8. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. Beweise:

$$\left(\frac{a}{b + c} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{c + a} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{a + b} + \frac{1}{2}\right) \geq 1$$

9. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Beweise

$$(a + c)(b + 1) \leq 4$$

   Wann gilt Gleichheit?