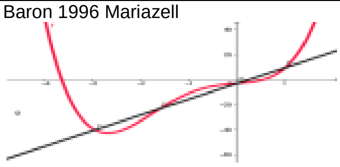
50. Österreichische Mathematik-Olympiade 26.April 2019

Vorbereitungskurs (**F**) „Mathematik macht Freu(n)de“ F_2019_04_26

1.) Löse in den positiven ganzen Zahlen $2x^2 - 2y^2 - 3xy = 2018$	Deutsche Mathematik-Olympiade 2017/2018
2.) Eine Gerade g: $y = kx+d$ schneidet den Graphen der Funktion $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 3x - 3$ in vier voneinander verschiedenen Punkten $A_1(x_1;y_1)$; $A_2(x_2;y_2)$; $A_3(x_3;y_3)$; $A_4(x_4;y_4)$. Bestimme $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$	Baron 1996 Mariazell 
3.) Gegeben ist ein Dreieck ABC mit AB =1 und <ABC = 120°. Auf AC liegt der Punkt D so, dass BD normal auf AB steht und DC =1 gilt. Bestimme die Länge von AD.	Deutsche Mathematik-Olympiade 2016/2017
4.) Ermittle die kleinste durch 100 teilbare Zahl n, die genau 100 Teiler besitzt. *Hinweis: 1 und n sind auch Teiler von n.*	Deutsche Mathematik-Olympiade 2016/2017
5.) Löse die Gleichung $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 = x + 1$ in den reellen Zahlen.	Deutsche Mathematik-Olympiade 2016/2017
6.) Im spitzwinkeligen Dreieck ABC ist P ein innerer Punkt von BC. Der Fußpunkt des von P auf AB gefällten Lotes sei D. Auf PD liegt der Punkt E mit <CEA = <CPA. Der Fußpunkt des von E auf AC gefällten Lotes sei F. Zeige, dass DF zu BC parallel ist.	Deutsche Mathematik-Olympiade 2016/2017
7.)a) Wie viele Lösungen in den nichtnegativen ganzen Zahlen besitzt die Gleichung **$x + y + z = 2019$**? b) Wie viele Lösungen in den nichtnegativen ganzen Zahlen besitzt die Gleichung **$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 2019$** für $1 \leq n \leq 2019$?	
8.) Wie viele Zahlen a (mit $1 \leq a \leq 100\,000$) haben genau sieben Quadratzahlen in ihrer Teilermenge?	Deutsche Mathematik-Olympiade 2016/2017
9.)a) In wie viele Bereiche teilen n Gerade die Ebene höchstens? b In wie viele Bereiche teilen n Ebenen den Raum höchstens?	
10.) Eine Menge M von Punkten P_1; P_2; …; P_n der Ebene mit folgender Eigenschaft ist gegeben: Jede Gerade durch zwei der gegebenen Punkte enthält mindestens einen weiteren Punkt. Zeige, dass alle Punkte auf einer Geraden liegen.	Aufgabe von Sylvester 1893 Beweis von L.M. Kelly 1948