



50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs „Mathematik macht Freu(n)de“

29. März 2019

1. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Für den Punkt E gilt: E liegt im Winkelfeld $\angle CAB$, $\angle EAB = 15^\circ$ und BE steht normal zu BD

Zeige: $BD = AE$

2. Der Inkreis eines Dreiecks ABC berührt die Seite AC in X und die Seite BC in Y . Die Winkelsymmetrale durch den Eckpunkt B schneidet XY im Punkt P . Bestimme den Winkel $\angle APB$.

3. Gegeben sei ein Dreieck ABC , E der Mittelpunkt der Schwerlinie BD , H der an E gespiegelte Punkt A und F der Schnittpunkt von AH mit BC .

Zeige: $FH = \frac{1}{2}AF$.

4. Es seien x, y verschiedene positive ganze Zahlen. Beweise, dass

$$\frac{x^2 + 4xy + y^2}{x^3 - y^3}$$

nie eine ganze Zahl sein kann.

5. Zeige, dass keine Zahl der Gestalt $8888\dots 887$ durch 17 teilbar ist.

6. 8) Es seien x, y, z positive reelle Zahlen mit $xyz \geq 1$. Beweise:

$$(1 + x + y)^2 + (1 + y + z)^2 + (1 + z + x)^2 \geq 27.$$

7. Bestimme alle reellen Zahlen x , für die die Zahl $a = \frac{2x+1}{x^2+2x+3}$ eine ganze Zahl ist.

8. Man zeige: $n^4 + 98n^2$ ist für keine positive natürliche Zahl n vierte Potenz einer natürlichen Zahl.

9. Man bestimme alle reellen Zahlen x , für die folgende Ungleichung gilt:

$$(x - 1)^2(x - 4)^2 < (x - 2)^2.$$

10. Sei P ein Punkt innerhalb eines Dreiecks ABC . Wenn man durch den Punkt P drei Gerade parallel zu den Dreiecksseiten zieht, ergeben sich drei Dreiecke mit den Flächeninhalten 9, 25 und 49. Wie groß ist die Fläche des Dreiecks?

11. Löse die Gleichung $\sqrt[4]{1 + (2 - x)\sqrt{(x - 3)(x - 5) + 1}} = 1 - x$.