51. Österreichische Mathematik-Olympiade

JuniorInnen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 20.September 2019

J_2019_09_20

1.) Bestimme alle ganzen Zahlen a, b sodass $\|a^2 - b^2\| = 21$	
2.) Löse in den reellen Zahlen die Gleichung $5\|x-2\| = 4x+10$	
3.) *Löse das System* $a + b + c = 19$ $a^2 + b^2 - c^2 = 137$ $z \cdot c = 2019$ Dabei sind a, b, c positive ganze Zahlen und z ist eine reelle Zahl. Auf wie viele Arten kann man 19 als Summe von drei ganzen Zahlen a, b, c (alle ≥ 1) darstellen?	D Math. Olympiade 2018
4.) Auf der Seite c des Dreiecks ABC liegt der Punkt P (P soll zwischen den Punkten A und B liegen). Konstruiere eine Gerade durch P, die die Fläche des Dreiecks halbiert.	
5.) Löse in den reellen Zahlen $\lfloor x \rfloor = \frac{7}{5}x-2$ *Dabei ist* $\lfloor x \rfloor$ *die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.* $\lfloor x \rfloor$ *.... Gaußklammer von x*	
6.) Löse die Ungleichung in den reellen Zahlen $\|x+2\| \leq -\frac{x}{2}$	
7.) *Beweise folgenden Satz:* Wenn p eine Primzahl größer als 3 ist, dann ist p^2-1 durch 24 teilbar.	
8.) Für welche ganzen Zahlen n ist $\| 2n^2 - n - 6 \|$ eine Primzahl?	
9.) Zeige, dass für alle reellen Zahlen x die Ungleichung $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$ gilt.	

10.) Löse in den reellen Zahlen $\frac{x+4}{x+1} < x$	Th. Ballik: Math. Olympiade
11.) Bildet man aus einer dreistelligen Zahl eine sechsstellige, indem man die dreistellige zweimal hintereinander anschreibt, so ist die erhaltene sechsstellige durch 7 teilbar. Durch welche Primzahlen ist sie noch teilbar?	
12.) Zeige: Für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c gilt $(a+b)\bullet(b+c)\bullet(c+a) \geq 8abc$	
13.) Für beliebige reelle Zahlen a, b, c gilt: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$	