



51. Österreichische Mathematik-Olympiade

JuniorInnen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“

27. September 2019

Was du vom Schulunterricht können sollst:

- Ganze Zahlen, natürliche Zahlen $\{0, 1, 2, \dots\}$
- Teilbarkeit, Rechenregeln für Teilbarkeiten
- Dezimaldarstellung einer Zahl (Basis 10), Ziffernsumme
- Teilbarkeitsregeln durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11 und durch kleine Zweier-, Fünfer- und Zehnerpotenzen
- Primzahlen, Primfaktorzerlegung und ihre Eindeutigkeit, Primfaktorzerlegung spezieller Zahlen, z.B. der Jahreszahl
- Größter gemeinsamer Teiler (ggT), kleinstes gemeinsames Vielfache (kgV), teilerfremde Zahlen, Berechnung über Primfaktorzerlegung

1. Anlässlich des heutigen Datums bestimme man alle ganzen Zahlen x und y , für die $27x^2 + 9y^2 = 2019$ gilt.
2. Man bestimme alle ganzen Zahlen x und y , für die $27 + 9x^2 = y^2 + 2019$ gilt.
3. Man beweise, dass die Gleichung $x^2 + y^2 = 2019$ keine ganzzahligen Lösungen hat.
Man berechne alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = 2020$.
4. Welche Eigenschaften haben die Zahlen 2019 und 2020?
5. Man bestimme alle natürlichen Zahlen n , die genau 9 Teiler haben und keine Quadratzahlen sind.
6. Wie viele Jahreszahlen gibt es im 21. Jahrhundert (von 2000 bis 2099), die sowohl durch 16 als auch durch 20 teilbar sind?
7. Man bestimme die größte und die kleinste zehnstellige Zahl, die die Ziffernsumme 20 hat.
8. Man berechne die letzten zwei Ziffern der Zahl $(19^{20})^{2020}$.
9. Man bestimme alle Paare (x, y) von ganzen Zahlen, für die gilt: $x^3 - y^3 = 19$.