51. Österreichische Mathematik-Olympiade

JuniorInnenkurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 4.Oktober 2019

J_2019_10_04.docx

1.)	Zeige, dass für alle reellen Zahlen a die Ungleichung $9a^2 + 4 \geq 12a$ gilt. Wann gilt Gleichheit?	
2.)	Zeige, dass für alle reellen Zahlen x, y die Ungleichung $4x^2 + y^2 + 5 \geq 4(x + y)$ gilt. Wann gilt Gleichheit?	
3.)	Für alle a > 0 gilt $a + \frac{1}{a} \geq 2$. Für welche a gilt Gleichheit?	
4.)	Zeige: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$	
5.)	Für reelle Zahlen gilt: $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$	A.Engel: Problem-Solving Strategies
6.)	Löse in den reellen Zahlen $\frac{1}{x-3} < 2$	
7.)	Löse in R: $\sqrt{20-4x} < x-2$	T.Ballik: Mathematik-Olympiade
8.)	Löse in den reellen Zahlen $\lvert x^2-4x+1 \rvert > \lvert x^2-4x+5 \rvert$	LW 2002 G. Baron
9.)	Löse in den reellen Zahlen $-x^2 + x + 4 > \lvert x \rvert$	
10.)	Für welche Paare (x, y) reeller Zahlen gilt: $xy^2 - xy - x^2y + x^2 = 0$?	
11.)	Für welche ganzen Zahlen n ist $\lvert n^3+4n^2-4n-16 \rvert$ eine Primzahl?	
12.)	Zeige, dass $a + b \geq 2 \cdot \sqrt{ab}$ für positive reelle Zahlen a, b gilt. „AGMU“ Allgemein gilt: $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$	
13.)	Seien a, b, c Seiten eines Dreiecks. Dann gilt: $3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 \leq 4(ab + bc + ca)$	Birkhäuser Inequalities
14.)	Das harmonische Mittel zweier positiver Zahlen a, b ist kleiner oder gleich dem geometrischen Mittel dieser beiden Zahlen. $HM = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$; $GM = \sqrt{a.b}$	