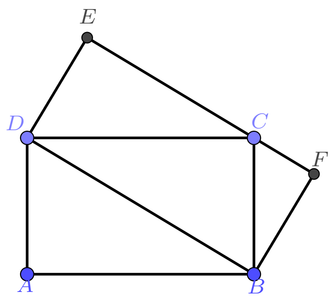
51. Österreichische Mathematik-Olympiade

JuniorInnen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 11.Oktober 2019

1. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\angle ACB = \gamma = 76°$. Die Punkte $E, (E \neq B), F, (F \neq A$ und G liegen auf den Seiten a, b und c des Dreiecks und es gilt $\overline{AG} = \overline{FG}$ und $\overline{BG} = \overline{EG}$. Ermittle den Winkel $\epsilon = \angle EGF$

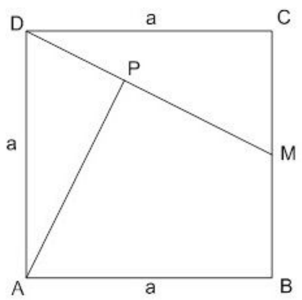
2. Im Dreieck ABC sind D, E, F die Mittelpunkte der Seiten AB, BC und CA. G ist der Fußpunkt der Höhe durch C. Man zeige, dass die Strecken DF und EG gleich lang sind.

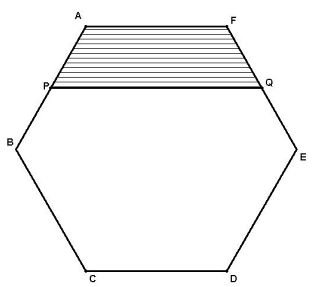
3. Das Rechteck $ABCD$ hat die Seitenlängen $AB = CD = 8cm$ und $AD = BC = 6cm$. Berechne den Flächeninhalt des über der Diagonalen BD errichteten Rechtecks $BDFE$, dessen Seite EF durch den Eckpunkt C des ursprünglichen Rechtecks geht.

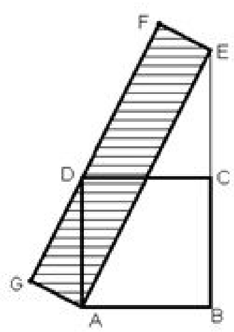


4. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ und M sei der Mittelpunkt der Seite BC. Der Fußpunkt des Lotes von A auf DM sei P. Beweise:

$$a)\ \overline{AP} = 2\overline{DP}, \quad b)\ \overline{DP} : \overline{PM} = 2 : 3, \quad c)\ \overline{AB} = \overline{BP}$$







5. Es sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck. Die Punkte P und Q seien die Mittelpunkte der Seiten AB bzw.EF. Wie groß ist der Flächeninhalt des Trapezes $APQF$, wenn der Flächeninhalt des Sechsecks $48cm^2$ ist .

   (WMDW 2014)

6. Das Quadrat $ABCD$ hat die Seitenlänge s = 6cm. Wie groß ist der Flächeninhalt des Rechtecks $AEFG$, wenn E auf der Seite BC liegt und $\overline{EC} = \overline{BC}$?

7. Gegeben sei ein Trapez $ABCD$. Auf der Seite AD liegt der Punkt E. Es gilt $\angle ABE = 18°$ und $\angle BEC = 30°$.

   Bestimme den Winkel $\angle ECD$.

8. In einem Rechteck $ABCD$ ist$M$ der Mittelpunkt der Seite AB und $\overline{AB} : \overline{AD} = 2 : 1$. Über der Strecke MD zeichne man ein gleichseitiges Dreieck MDX, derart, dass die Punkte X und A auf verschiedenen Seiten der Geraden MD liegen.

   Bestimme den Winkel $\angle XCD$.

9. Es sei ABC ein spitzwinkelige Dreieck, in dem sich die Winkelsymmetrale des Winkels $\angle BAC$, die Höhe durch B und die Symmetrale der Seite AB in einem Punkt schneiden. Man bestimme die Größe des Winkels $\alpha = \angle BAC$.

   (LWA 2008 - Walther Janous)

10. Ein besonderes gleichschenkeliges Dreieck ABC hat folgende Eigenschaft: Die Streckensymmetrale von AB schneidet die Winkelsymmetrale von $\angle CBA$ in einem Punkt P, der auf AC liegt.

    Wie groß sind die Winkel des Dreiecks?

11. In einem konvexen Viereck $ABCD$ gibt es einen Punkt P mit folgenden Eigenschaften: P ist der Inkreismittelpunkt von ABC und der Umkreismittlpunkt von CDA.

    Beweise, dass der Winkel $\angle ADC$ stumpf ist.

12. Es sei A der Flächeninhalt, r der Inkreisradius und s der halbe Umfang eines Dreiecks ABC. Beweise:
    $$r = \frac{A}{s}$$

13. Wir betrachten ein Parallelogramm $ABCD$, in dem der Mittelpunkt M der Seite CD auf der Winkelsymmetrale von $\angle BAD$ liegt. Man zeige, dass $\angle AMB$ ein rechter Winkel ist.

    (LWA 2007 - Stephan Wagner)