51. Österreichische Mathematik-Olympiade

JuniorInnenkurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 18.Oktober 2019

J_2019_10_18.docx

1.)	Die **Mittelungleichungen** für zwei Variable x, y > 0 $$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$ QM Quadratisches, AM Arithmetisches, GM Geometrisches, HM Harmonisches Mittel	
2.)	Zeige, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b die Ungleichung $\frac{a^2+1}{b} + \frac{b^2+1}{a} \geq 4$ gilt.	
3.)	Zeige, dass für reelle Zahlen x, y $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$ gilt.	
4.)	Für alle reellen Zahlen x gilt $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$	
5.)	Seien a, b reelle Zahlen mit $0 < a, b < 1$. Dann gilt $a + b^2 < ab + 1$	
6.)	Löse das System in den reellen Zahlen $\begin{cases} \lfloor x \rfloor + \{y\} = z \\ \lfloor y \rfloor + \{z\} = x \\ \lfloor z \rfloor + \{x\} = y \end{cases}$ $\lfloor x \rfloor \ldots.\textit{größte ganze Zahl} \leq x$ und $\{y\}$ … $y - \lfloor y \rfloor$	LW 2005
7.)	Löse in den reellen Zahlen $\left\lfloor \frac{2x+5}{3} \right\rfloor = \frac{7x-3}{5}$ $\lfloor x \rfloor$…. größte ganze Zahl kleiner oder gleich x	
8.)	Sind a, b, c Seitenlängen eines Dreiecks, so kann man aus den drei Größen $\sqrt{a}$; $\sqrt{b}$; $\sqrt{c}$ ein Dreieck konstruieren.	
9.)	Zeige: Für $a \geq -1$; $b \geq 1$ gilt: $a + b \geq 2\sqrt{(a+1)(b-1)}$	
10.)	Zeige, dass $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle natürlichen Zahlen n=1; 2; … gilt.	
11.)	Zeige: Für alle positiven reellen Zahlen a, b gilt: $\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$	

Einige Aufgaben sind dem Buch von Tom *Ballik: Mathematik-Olympiade* entnommen.