51. Österreichische Mathematik-Olympiade

JuniorInnenkurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 29.November 2019

J_2019_11_29.docx

1.) Zeige, dass für nichtnegative reelle Zahlen x, y, z mit $x + y + z = 1$
$xy + yz + zx < \frac{1}{2}$ gilt.
Lässt sich diese Abschätzung verschärfen?

2.) Löse in den nichtnegativen ganzen Zahlen $a^2 = b(b+7)$ *W.Janous*

3.) Welche Zahlen p können gewählt werden, so dass die Ungleichung
$x^2 - pxy + y^2 \geq 0$ für alle reellen Zahlen gilt?

4.) Zeige: Für alle reellen x, y gilt
$x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 41 \geq 0$
Wann gilt Gleichheit?

5.) In einem Dreieck mit üblicher Beschriftung gilt: $\alpha > \beta$.
Zeige, dass $a > \frac{c}{2}$ gilt.

6.) Zeige, dass für alle reellen Zahlen x, y gilt:
$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$

7.) Löse in den nichtnegativen ganzen Zahlen $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2020}$

8.) Löse in Z: $x^3 - y^3 = 19$

9.) Löse in den ganzen Zahlen $x^2 + y^2 = 2(2x-y)$

10.) Gegeben ist die Gleichung $3^x = 4y + 5$.
(a) Für welche ganzzahligen Lösungen (x; y) ist x eine Primzahl?
(b) Löse die Gleichung in den ganzen Zahlen.

11.) Löse in den ganzen Zahlen $x(y+1)^2 = 343y$