51. Österreichische Mathematik-Olympiade

JuniorInnen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 20 .Dezember 2019

1. Es sei ABC ein gleichschenkeliges Dreieck mit $AC = BC$. Auf dem Bogen CA seines Umkreises, der B nicht enthält, liege ein Punkt P. Der Fußpunkt der Normalen durch C auf die Gerade AP werde mit E bezeichnet, der Fußpunkt der Normalen durch C auf die Gerade BP werde mit F bezeichnet. Man beweise, dass die Strecken AE und BF gleich lang sind.
   (Walther Janous)

2. Es seien a ,b positive reelle Zahlen mit $a + b = 1$. Beweise:
$$\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{3}.$$

3. Es seien a, b, c und d reelle Zahlen mit $a < b < c < d$. Man ordne $x = a \cdot b + c \cdot d$, $y = b \cdot c + a \cdot d$ und $z = c \cdot a + b \cdot d$ der Größe nach und beweise die angegebene Reihenfolge. [1, A 2]

4. Gegeben sind die nichtnegativen reellen Zahlen a und b mit $a + b = 1$. Man beweise:
$$\frac{1}{2} \leq \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} \leq 1$$
   Wann gilt Gleichheit in der linken Ungleichung, wann in der rechten? [2, A 1]

5. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $AB > AC$ und dem Umkreismittelpunkt O. Es sei D ei Punkt auf der Seite BC und E der Fußpunkt des Lotes von D auf AB. Der Schnittpunkt der Geraden AO mit DE sei P.

   Beweise, dass die Punkte A, P, D und C auf einem Kreis liegen.

6. Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. Beweise:
$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8$$

7. Welche der beiden Zahlen $\sqrt{a} - \sqrt{a-1}$ oder $\sqrt{a+1} - \sqrt{a}$ ist für $a > 1$ größer?

8. Es seien x, y positive reelle Zahlen mit $x + y = 1$. Man beweise:
$$\frac{(3x-1)^2}{x} + \frac{(3y-1)^2}{y} \geq 1$$

Literatur

[1] Junior-Regionalwettbewerb 2014. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/82`. (aufgerufen am 23.12.2019).

[2] Junior-Regionalwettbewerb 2017. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/329`. (aufgerufen am 23.12.2019).