# 51. Österreichische Mathematik-Olympiade

JuniorInnen Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 17. Jänner 2020

1. Es seien $x, y$ positive reelle Zahlen mit $x + y = 1$. Man beweise:

$$\frac{(3x-1)^2}{x} + \frac{(3y-1)^2}{y} \geq 1$$

2. In einem Rechteck $ABCD$ ist$M$ der Mittelpunkt der Seite $AB$ und $\overline{AB} : \overline{AD} = 2 : 1$. Über der Strecke $MD$ zeichne man ein gleichseitiges Dreieck $MDX$, derart, dass die Punkte $X$ und $A$ auf verschiedenen Seiten der Geraden $MD$ liegen.

   Bestimme den Winkel $\angle XCD$.

3. Es sei $ABC$ ein Dreieck. Die Mittelpunkte der Seiten $BC, AC$ und $AB$ werden mit $D, E$ bzw. $F$ bezeichnet. Die beiden Schwerlinien $AD$ und $BE$ sollen aufeinander normal stehen und die Längen $\overline{AD} = 18$ und $\overline{BE} = 13,5$ haben.

   Man berechne die Länge der dritten Schwerlinie $CF$ dieses Dreiecks.[1, Karl Czakler]

4. Es sei $ABC$ ein spitzwinkelige Dreieck, in dem sich die Winkelsymmetrale des Winkels $\angle BAC$, die Höhe durch $B$ und die Symmetrale der Seite $AB$ in einem Punkt schneiden. Man bestimme die Größe des Winkels $\alpha = \angle BAC$.[2, Walther Janous, LWA 2008]

5. Es seien $x, y$ positive reelle Zahlen mit $x + y + xy = 3$. Man beweise, dass $x + y \geq 2$

6. Es seien $a, b, c, d$ reelle Zahlen. Beweise, dass von den Zahlen $a - b^2$, $b - c^2, c - d^2$ und $d - a^2$ nicht alle größer als $\frac{1}{4}$sein können.

7. Für die positiven reellen Zahlen $x$ und $y$ gilt die Bedingung $xy = 4$. Man beweise, dass die Ungleichung

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{y+3} \leq \frac{2}{5}$$

8. Löse folgende Ungleichung in der Menge der reellen Zahlen:

$$\frac{|x^2-4|}{x+2} \geq x$$

# Literatur

[1] Junior-Regionalwettbewerb 2014. `https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/82`. (aufgerufen am 13.1.2020).

[2] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2000-2008: Aufgaben und Lösungen.* Nova MD, 2018. Auflage 1.3.