51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 24. Jänner 2020

1. Man beweise, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, deren Ziffernsumme genau so groß wie ihr Ziffernprodukt ist.
2. Man bestimme alle Polygone mit ganzzahligen Innenwinkeln, deren Winkel sich wie $1:2:3:\dots$ verhalten. Wie groß kann der kleinste Winkel höchstens sein?
3. Man beweise, dass für alle positiven ganzen Zahlen n gilt: $0<\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}<1$.
4. Für ein gleichschenkeliges Dreieck ABC mit der Basis AB und dem Inkreismittelpunkt I gilt: Der Umfang des Vierecks AIBC ist doppelt so groß wie der des Dreiecks AIB.

   Man berechne die Winkel des Dreiecks.
5. Man ermittle alle zweistelligen Zahlen, die doppelt so groß wie das Produkt ihrer Ziffern sind.
6. Sei x eine positive natürliche Zahl. Dann nennen wir einen Bruch der Form $\frac{1}{x}$ einen Stammbruch.
   a) Beweise: Jeder Stammbruch lässt sich als Summe von zwei Stammbrüchen anschreiben. Gib insbesondere an, wie man $\frac{1}{2019}$ und $\frac{1}{2020}$ als Summe von zwei Stammbrüchen schreiben kann!
   b) Für manche Stammbrüche gibt es verschiedene Möglichkeiten, sie als Summe von zwei Stammbrüchen anzuschreiben: Z.B. $\frac{1}{15}=\frac{1}{24}+\frac{1}{40}$ oder $\frac{1}{15}=\frac{1}{16}+\frac{1}{240}$. Gib einen Stammbruch an, bei dem es mehr als drei verschiedene Zerlegungen in eine Summe von zwei Stammbrüchen gibt! (Solche Zerlegungen nennen wir verschieden, wenn sie sich nicht nur durch die Reihenfolge der Summanden unterscheiden.)
   c) Gib den größten Stammbruch an, bei dem es drei verschiedene Zerlegungen in eine Summe von zwei Stammbrüchen gibt!
7. Für alle ganzen Zahlen n versteht man unter $s(n)$ die Summe aller positiven Teiler von n.

   Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, für die gilt: $\sqrt{s(n)}>\frac{n}{2}$.
8. Ist es möglich, in eine 3x3-Tabelle die Zahlen $2012,\dots,2020$ so einzutragen, dass jeweils zwei waagrecht oder senkrecht benachbarte Zahlen teilerfremd sind?
9. a) Die natürlichen Zahlen n und $n+1$ seien nicht durch 3 teilbar.
   Wie viele durch 3 teilbare natürliche Zahlen liegen zwischen n^3 und $(n+1)^3$?
   b) Man bestimme alle natürlichen Zahlen m, für die gilt:
   Zwischen m^3 und $(m+1)^3$ liegt keine durch 2020 teilbare natürliche Zahl.