51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Juniorinnenkurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 31.Jänner 2020

J_2020_01_31.docx

1.) Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ natürlicher Zahlen ist durch $a_1 = 1$; $a_2 = 1$ und $a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1} + 1$ gegeben.
   (a) Zeige, dass a_{2020} nicht durch 4 teilbar ist.
   (b) Ist a_{2020} eine Quadratzahl?
   (c) Zeige, dass $\frac{a_{2019}+a_{2020}+a_{2021}}{4}$ eine ganze Zahl ist.

2.) Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ natürlicher Zahlen ist durch $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = 3a_n - 2$ gegeben.
   - Gib ein explizites Bildungsgesetz für a_n an.
   - Zeige, dass a_{2020} nicht durch 5 teilbar ist.

3.) Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n die Ungleichung $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ gilt.

4.) Zeige, dass für alle reellen Zahlen x gilt: $x^6 + 2 \geq x^4 + 2x$

5.) Es seien a, b, c, d ganze Zahlen, für die $7a + 8b = 14c + 28d$ gilt. Man zeige, dass das Produkt $a\cdot b$ immer durch 14 teilbar ist. W. Janous LWA 2012

6.) In einem Dreieck ABC seien D, E, F die Fußpunkte der Höhen auf BC, CA, AB. Zeige: Die Höhen im Dreieck ABC sind die Winkelhalbierenden im Dreieck DEF.

7.) Bestimme alle Paare (a; b) ganzer Zahlen, sodass $5a^2 + 4b^2 - 8ab - 6a + 4 = 0$

8.) Zeige, dass für alle Paare (x;y) reeller Zahlen gilt: $(1+x+y)^2 \geq 3(x+y+xy)$

9.) In einem Quadrat ABCD seien E bzw. F Punkte auf BC bzw. CD so, dass der Winkel $\angle EAF = 45°$ ist. M und N seien die Schnittpunkte von BD mit AE bzw. AF. Zeige, dass AMFD auf einem Kreis liegen. Bestimme weiters den Winkel $\angle FMA$.

Einige Aufgaben wurden dem Buch von Andreescu; Enescu: Mathematical Olympiad Treasures;

Verlag Birkhäuser entnommen.