51. Österreichische Mathematik-Olympiade

JuniorInnen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 21. Februar 2020

1. Für die reellen Zahlen x und y gilt $x + y = 20$.

   Man beweise, dass $x^2 \cdot (4 - y) \geq y^2 \cdot (x - 25)$ gilt.

2. Anton, Bernd und Christian spielen das Zwanzigerspiel, und das geht so: Jeder bekommt eine Startzahl zugelost und dann addieren sie in der ersten Runde jeweils 20 zu dieser Startzahl. Zur berechneten Zahl addieren sie in jeder weiteren Runde wieder jeweils 20. Sieger ist, wer als erster eine Quadratzahl erreicht.

   Wer gewinnt, wenn Anton die Startzahl 45, Bernd die Startzahl 46 und Christian die Startzahl 48 bekommt?

3. Das Dreieck ABC hat die Innenwinkel $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA$ und $\gamma = \angle ACB$ und es gilt $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 4 : 5$. M ist der Umkreismittelpunkt von ABC. Der Kreis durch A, M und C schneidet die Strecke AB in den Punkten A und D.

   Man beweise, dass das Dreieck DBC gleichseitig ist.

4. Sei p eine Primzahl. Für welche ganzen Zahlen x gilt $|x^3 + x - 2| = p$? [1]

5. Gegeben sei ein Quadrat ABCD. Es sei P ein Punkt auf der Geraden AB. Der Schnittpunkt von AC mit DP sei S. Die Normale auf DP durch den Punkt S schneidet die Seite BC in E.

   Man beweise: Das Dreieck DSE ist gleichschenklig. [1]

6. Unter einer Palindromzahl versteht man eine natürliche Zahl, die im dekadischen System geschrieben von vorne und von hinten gelesen den gleichen Wert hat. Zum Beispiel ist 5885 eine vierstellige Palindromzahl.

   Man bestimme den größten gemeinsamen Teiler aller vierstelligen Palindromzahlen. [1]

7. Die beiden Kreise $k_1[M_1; r_1]$ und $k_2[M_2; r_2]$ berühren einander von außen. A liegt auf k_1 und der Winkel $\angle M_2M_1A$ beträgt 60^o. Die Tangente durch A berührt auch k_2.

   Wie lang ist der Radius r_2?

8. Gesucht sind n ($\leq$ 19) paarweise verschiedene Zahlen a_1, a_2, ..., a_n aus der Menge $\{1, 2, ...19\}$, für die gilt: $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 20 \cdot 19$.

   Man gebe ein Beispiel für solche Zahlen an.

   Kann es sein, dass alle diese Zahlen ungerade sind?

9. Für ein gleichschenkeliges Dreieck ABC mit der Basis AB und dem Inkreismittelpunkt I gilt: Der Umfang des Vierecks AIBC ist doppelt so groß wie der des Dreiecks AIB.

   Man berechne die Winkel des Dreiecks!

Literatur

[1] Mathematik macht Freu(n)de, Kurswettbewerb für Junior*innen 2019. `https://mmf.univie.ac.at/fileadmin/user_upload/p_mathematikmachtfreunde/Olympiade/Anf_1819/Kurswettbewerb_AnfaengerInnen.pdf`. 24. Mai 2019, (aufgerufen am 17.2.2020).