51. Österreichische Mathematik-Olympiade

JuniorInnenkurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 28.Februar 2020

J_2020_02_28

1.) Wenn die natürliche Zahl n die Summe von zwei Quadraten ist, so gilt dies auch für die Zahl 2n. Zeige dies.

2.) Löse in den positiven ganzen Zahlen $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{15}$

3.) Wenn eine arithmetische Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Quadratzahl enthält, so enthält sie sogar unendlich viele Quadratzahlen.
Eine arithmetische Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ *ist eine Folge der Form* $a_n = a_0 + n \cdot d$

4.) Zeige, dass für alle positiven Zahlen a und b die Ungleichung
$\frac{1}{ab^3} + \frac{1}{a^3b} \geq \frac{4}{a^4+b^4}$ gilt.

5.) Man beweise für alle reellen Zahlen a die Ungleichung $a + a^3 - a^4 - a^6 < 1$. GW 2012 G.Baron

6.) Löse in den ganzen Zahlen: $1 + x^2y = x^2 + 2xy + 2x + y$ Großbritannien 2002

7.) In einem Parallelogramm #ABCD liegt der Mittelpunkt M der Seite CD auf der Winkelsymmetralen des Winkels <BAD. LW 2007 Stephan Wagner
Zeige, dass der Winkel <AMB ein rechter Winkel ist.

8.) Sei n eine ganze Zahl und p eine Primzahl. Löse die Gleichung $n^2 - 7n + 8 = p$

9.) a) Man zeige: Das Produkt von 5 aufeinander folgenden geraden natürlichen Zahlen ist stets durch 15 teilbar. LW 2003
b) Man bestimme die größte ganze Zahl D, so dass das Produkt von 5 aufeinander folgenden geraden natürlichen Zahlen stets durch D teilbar ist.

10.) In einem rechtwinkeligen Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen a, b, c ist der Inkreisradius ρ ganzzahlig. Zeige dies.