



51. Österreichische Mathematik-Olympiade

JuniorInnen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“

6. März 2020

- Die beiden Kreise $k_1(M_1, r_1)$ und $k_2(M_2, r_2)$ berühren einander von außen. A liegt auf k_1 und der Winkel $\angle M_2 M_1 A$ beträgt 60° . Die Tangente durch A berührt auch k_2 .
Wie lang ist der Radius r_2 ?
- Gesucht sind n (≤ 19) paarweise verschiedene Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n aus der Menge $\{1, 2, \dots, 19\}$, für die gilt: $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 20 \cdot 19$.
Man gebe ein Beispiel für solche Zahlen an.
Kann es sein, dass alle diese Zahlen ungerade sind?
- Man beweise, dass für alle reellen Zahlen x gilt: $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9 \geq 0$.
Für welche x gilt das Gleichheitszeichen?
- u, v und w sind positive ganze Zahlen, für die gilt: $u \neq v$ und $w = \frac{u^2 + v^2}{u + v}$.
 - Man beweise: $\min(u, v) < w < \max(u, v)$.
 - Man beweise: Wenn w gerade ist, so sind auch u und v gerade.
 - Man beweise: Wenn $u + v$ ungerade ist, so ist uv durch $u + v$ teilbar.
 - Man bestimme die kleinstmögliche Zahl w , die die angegebenen Bedingungen erfüllt und für dieses w alle möglichen Paare u, v .
- Ein Viereck hat einen Umkreis mit dem Radius 1, dessen Mittelpunkt auf einer Viereckseite liegt. Man beweise, dass der Flächeninhalt dieses Vierecks höchstens $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ ist.
- Man beweise, dass man 2020 als Summe der Quadrate von vier Primzahlen schreiben kann.
Welches ist die kleinste vierstellige Zahl, die man als Summe der Quadrate von fünf Primzahlen schreiben kann?
- Man beweise: Wenn zwei Kreise einander unter einem Winkel von 60° schneiden, so ist ihr Zentralabstand (= Abstand der beiden Mittelpunkte) mindestens so groß wie das geometrische Mittel ihrer Radien.
- Gesucht sind alle natürlichen Zahlen n , die genau 4 positive Teiler haben und für die gilt: Die Summe aller positiven Teiler ist größer oder gleich $2n - 1$.
- Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen x und y , für die $2^x + y^2 = 2020$ gilt.