51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Oberstufen-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ – Aufgabenblatt für den 3. April 2020

Ablauf

Dieses Aufgabenblatt wurde von Nina Mitrovic zusammengestellt.

Wir freuen uns auf deine Fragen und Lösungsvorschläge per E-Mail.

Am 31. März 2020 wird das Blatt mit Tipps zur Lösung ausgewählter Aufgaben ergänzt. Josef Greilhuber bespricht die Aufgaben mit euch im virtuellen Olympiade-Kurs am 3. April 2020 von 15:30–17:00 Uhr. Kurz darauf ergänzen wir das Blatt um ausgewählte Lösungsvorschläge und Angaben zu den Quellen der Aufgaben.

Schreibe uns, wenn du bei den virtuellen Kursen dabei sein möchtest. Du bist jederzeit willkommen!

Aufgaben

Aufgabe 1. Wie viele Paare positiver ganzer Zahlen (m, n) gibt es, sodass

$$m \cdot n + 2 \cdot m - 2 \cdot n = 2020$$

gilt?

Aufgabe 2. Eine Urne enthält 30 nummerierte Kugeln. Die Kugeln sind mit den Zahlen von 1 bis 30 durchnummeriert. Marko zieht 2 Kugeln aus der Urne. Wie wahrscheinlich ist es,

a) dass die Differenz ihrer Zahlen durch 5 teilbar ist?

b) dass die Summe ihrer Zahlen durch 5 teilbar ist?

Aufgabe 3. Beweise, dass die Summe von 5 aufeinanderfolgenden Quadratzahlen kein Quadrat einer natürlichen Zahl sein kann.

Aufgabe 4. Finde alle ganzen Zahlen n, für die die Gleichung

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

genau 5 Lösungen (x, y) in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ hat.

Aufgabe 5. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit der Höhe CN. Die Winkelsymmetrale von $\angle BAC$ schneidet die Höhe CN im Punkt D und die Seite BC im Punkt E. Das Dreieck DEC ist gleichseitig und hat die Fläche $4\sqrt{3}$. Berechne die Fläche des Dreiecks ABC.

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

Aufgabe 1. Faktorisierung

Aufgabe 2: Unterteile die Kugeln in 5 Gruppen. Zwei Kugeln sind genau dann in derselben Gruppe, wenn ihre Nummern bei Division durch 5 denselben Rest ergeben.

Aufgabe 3: Denke über den Rest bei Division durch 5 und Division durch 3 nach.

Aufgabe 4: Primfaktorzerlegung

Aufgabe 5: Winkeljagd

Lösungsvorschläge zu ausgewählten Aufgaben

Lösungsvorschläge von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 1.

Die gegebene Gleichung ist äquivalent zu

$$(n+2)\cdot(m-2) = 2016.$$

Weil $n+2>2$, ist auch

$$m-2 = \frac{2016}{n+2} > 0.$$

Andererseits ist $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Deshalb gilt

$$n+2 = 2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$$

mit $0 \leq a < 6$, $0 \leq b < 3$, $0 \leq c < 2$, und, weil $n+2>2$, zusätzlich $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ bzw. $(a,b,c) \neq (1,0,0)$. Also gibt es

$$34 = 6 \cdot 3 \cdot 2 - 2$$

Möglichkeiten für n. Zu jedem solchen n gibt es genau ein passendes m, nämlich

$$m = \frac{2016}{n+2} + 2.$$

Daher ist die gesamte Anzahl der Möglichkeiten 34.

Aufgabe 2.

Die gesamte Anzahl der möglichen Paare ist

$$\frac{30 \cdot 29}{2} = 435.$$

Wir verteilen die Kugeln in Gruppen modulo 5:
$A(0) = 5, 10, 15, 20, 25, 30$
$A(1) = 1, 6, 11, 16, 21, 26$
$A(2) = 2, 7, 12, 17, 22, 27$
$A(3) = 3, 8, 13, 18, 23, 28$
$A(4) = 4, 9, 14, 19, 24, 29$

a) Wir brauchen für den ersten Teil der Aufgabe genau die Paare, die in derselben Gruppe sind. Die Anzahl der Paare in einer Gruppe ist $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$. Daher ist die gesamte Anzahl solcher Paare gleich $15 \cdot 5 = 75$ (weil wir 5 Gruppen haben). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\frac{75}{435} = \frac{5}{29}.$$

b) Für den zweiten Teil der Aufgabe betrachten wir die folgenden 3 Fälle:

1. Paare mit zwei Kugeln, die beide in $A(0)$ sind

2. Paare in denen, eine Kugel in $A(1)$ und andere in $A(4)$ ist

3. Paare in denen, eine Kugel in $A(2)$ und andere in $A(3)$ ist

Im ersten Fall haben wir genau $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ solcher Paaren, weil $A(0)$ 6 Elemente hat.
Im zweiten Fall gibt es 6 Möglichkeiten, um eine Kugel aus $A(1)$ und 6 Möglichkeiten, um eine Kugel aus $A(4)$ auszuwählen. Daher gibt es insgesamt $6 \cdot 6 = 36$ Möglichkeiten in diesem Fall. Der dritte Fall ist analog zum zweiten. Es gibt 36 Möglichkeiten.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\frac{15 + 36 + 36}{435} = \frac{1}{5}.$$

Aufgabe 3.

Wir bezeichnen die Zahlen mit $x-2$, $x-1$, x, $x+1$ und $x+2$. Die Summe ihrer Quadrate ist dann gleich:

$$(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 5(x^2+2)$$

Wäre diese Summe eine Quadratzahl, dann müsste sie auch durch 25 teilbar sein (weil wir sehen, dass sie durch 5 teilbar ist). Daraus folgt, dass $5 \mid (x^2+2)$, bzw. dass $x^2 \equiv 3 \pmod 5$. Aber 3 ist kein quadratischer Rest modulo 5. Daher kann diese Summe nicht durch 25 teilbar sein.

Aufgabe 4.

Durch Multiplikation der Gleichung mit $x \cdot y \cdot n \neq 0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& n \cdot y + n \cdot x = x \cdot y \\
\Leftrightarrow \quad & -n \cdot y - n \cdot x + x \cdot y = 0 \quad | + n^2 \\
\Leftrightarrow \quad & x \cdot y - n \cdot x - n \cdot y + n^2 = n^2 \\
\Leftrightarrow \quad & (x-n) \cdot (y-n) = n^2 \qquad (*)
\end{aligned}$$

Betrachten wir die Primfaktorzerlegung von n, also $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, wobei p_i paarweise verschiedene Primzahlen sind und $\alpha_i \geq 1$, $i = 1, \ldots, k$. Die Anzahl der Lösungen von $(*)$ ist gleich der Anzahl der Zerlegungen von n^2 in zwei ganzzahlige Faktoren, mit Ausnahme der Zerlegung in $n \cdot n$, also

$$2 \cdot (2 \cdot \alpha_1 + 1) \cdot (2 \cdot \alpha_2 + 1) \cdots (2 \cdot \alpha_k + 1) - 1.$$

(Bei Zerlegung von n^2 in die beiden Teiler n und n, wäre die linke Seite der Gleichung 0.) Dieser Ausdruck ist genau dann gleich 5 wenn $k = 1$ und $\alpha_1 = 1$, und daraus folgt, dass $n = p$, wobei p eine Primzahl ist.

Aufgabe 5.

Das Dreieck DEC ist ein gleichseitiges Dreieck. Deswegen gilt:

$$|\angle EDC| = |\angle CED| = |\angle DCE| = 60^\circ$$

Da $|\angle EDC| = |\angle ADN| = 60^\circ$, ist $|\angle NAD| = 30^\circ$ (da $\angle DNA = 90^\circ$).
Die Gerade AD ist die Winkelsymmetrale von $\angle NAC$ und $|\angle NAD| = |\angle DAC| = 30^\circ$ und dadurch ist $\angle NAC = 60^\circ$.
Aus $|\angle CNA| = 90^\circ$ und $|\angle NAC| = 60^\circ$ folgt $|\angle ACN| = 30^\circ$.

Weil $|\angle ACN| = 30°$ und $|\angle DCE| = 60°$ ist $|\angle ACB| = 90°$.
Im Dreieck ABC gilt folglich $|\angle CBA| = 30°$.
Die Fläche des Dreiecks DEC ist $4\sqrt{3}$. Sei die Seitenlänge im gleichseitigen Dreieck DEC gleich x, dann gilt $\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$. Daraus folgt $x = 4$.
Da $|\angle DCA| = |\angle DAC| = 30°$ ist ΔDCA ein gleichschenkeliges Dreieck. Im Dreieck CFD gilt, dass

$$|CF| = \frac{x}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

Weiters gilt $|AC| = 2|CF| = 4\sqrt{3}$.
Wir sehen leicht, dass $\triangle ABE$ ein gleichschenkeliges Dreieck ist, woraus folgt $|BE| = |AE| = 2x = 8$.
Deshalb ist $|BC| = |BE| + |EC| = 12$. Die Längen der Katheten des Dreiecks ABC sind 12 und $4\sqrt{3}$, dadurch ist seine Fläche gleich $\frac{12\cdot 4\sqrt{3}}{2}$.
(Bemerkung: $\triangle ABC$ ist ein „halbes“ gleichseitiges Dreieck. Durch Spiegelung der Kathete, die am Winkel mit 30° anliegt, erhält man ein gleichseitiges Dreieck. Diese Spiegelung kann auf dem Weg zur Lösung einer Aufgabe sehr hilfreich sein!)

Quellenangaben zu den Aufgaben

Quellen der Aufgaben

Aufgabe 1.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 2.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 3.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 4.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Aufgabe 5.

aus [1], übersetzt von Nina Mitrovic, bearbeitet vom MmF-Team

Literatur

[1] Kroatischer Regionalwettbewerb Natjecanja iz matematike u RH. `http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm`. (aufgerufen am 17.04.2020).